Verlauft

L 9

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

180921) Lösung: 8 Punkte

Es kommt z. B. unter den sechsstelligen Zahlen 1 0 0 0 0 8 ,
1 0 0 0 0 9 ,
1 0 0 0 1 0 und
1 0 0 0 1 1

keine Zahl vor, deren Quersumme durch 4 teilbar ist. Also hat der ältere Sohn recht.

180922) Lösung: 12 Punkte

Zu (1): Die Zahlen $\sqrt{2}$ und die von ihr verschiedene Zahl $\sqrt{8}$ sind irrational, ihr Produkt $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4$ ist dagegen rational. Aussage (1) ist also falsch.

Zu (2): $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ sind verschiedene irrationale Zahlen. Ihre Summe ist 0. Das ist eine rationale Zahl. Aussage (2) ist also falsch.

Zu (3): Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl r und eine irrationale Zahl x, deren Summe eine rationale Zahl wäre. Dann gäbe es ganze Zahlen a, b, c, d mit $b \neq 0$, $d \neq 0$ und

$$r = \frac{a}{b}, \quad r + x = \frac{c}{d}.$$

Daraus ergäbe sich $x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd}$, also der Widerspruch, daß x rational wäre. Damit ist bewiesen, daß Aussage (3) wahr ist.

(Zum Beweis von (3) kann auch statt der rechnerischen Umformung von $x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ als Satz zitiert werden, daß die Differenz zweier rationaler Zahlen stets wieder eine rationale Zahl ist.)

180923) Lösung: 10 Punkte

Nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegt B auf dem Halbkreis über AC. Sei M der Mittelpunkt von AC, dann ist der Kreis um M mit dem Radius $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = r$ der Umkreis des Dreiecks ABC. Damit gilt $\overline{AC} = 2r$.

Das gleichschenklige Dreieck ABM hat laut Voraussetzung einen Winkel mit der Größe $60^\circ$, ist also gleichseitig.

Daraus folgt $\overline{AB} = r$. Nach dem Satz des Pythagoras erhält man $\overline{CB} = r\sqrt{3}$.

Damit gilt für den Umfang $u = 3r + r\sqrt{3} = r\,(3 + \sqrt{3})$ und für den Flächeninhalt $I = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2}\, r^2 \cdot \sqrt{3}$.

Da der Flächeninhalt auch nach der Formel $I = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot h = r \cdot h$, mit h als Länge der Höhe auf der Hypotenuse AC berechnet werden kann, folgt $h = \frac{I}{r} = \frac{1}{2}\, r \cdot \sqrt{3}$.

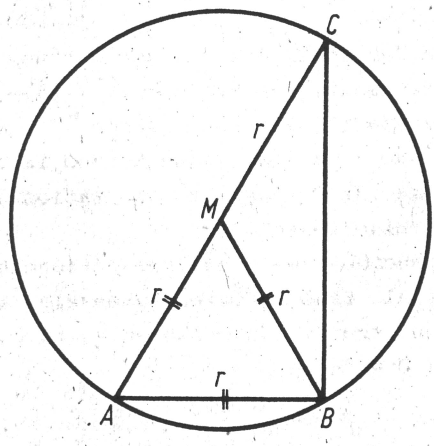


Abb. L. 923

180924) Lösung: 10 Punkte

Angenommen, eine dreistellige Zahl z hat die Eigenschaften (1) bis (4).

Wegen (2) können dann in ihr nur folgende Zahlen als Ziffer vorkommen: 2, 3, 5 und 7. Davon können wegen (1) die Zahlen 2 und 5 nicht als Endziffern auftreten.

Also endet z auf eine der Ziffern 3 oder 7.

L 9

Da die Quersumme z' eine zweistellige Primzahl ist, die als Summe von drei Summanden gebildet wird, von denen keiner größer als 7 ist, kann z' nur eine der Zahlen 11; 13; 17 oder 19 sein.

Von ihnen hat nur z' = 11 eine Primzahl, nämlich die Zahl 2, als Quersumme.
Also gilt z' = 11.
Sei nun die letzte Ziffer von z die Zahl 7. Dann muß die Summe der durch die beiden ersten Ziffern dargestellten Zahlen 4 betragen. Von den möglichen Zerlegungen der Zahl vier in zwei natürliche Zahlen als Summanden (nämlich 0 + 4; 1 + 3; 2 + 2; 3 + 1 und 4 + 0) erfüllt nur 2 + 2 die Bedingung (2). Damit erhält man z = 227.
Sei nun 3 die letzte Ziffer von z. Dann muß die Summe der durch die ersten beiden Ziffern von z dargestellten Zahlen 8 betragen. Von den möglichen Zerlegungen der Zahl 8 in zwei natürliche Zahlen als Summanden (nämlich 0 + 8; 1 + 7; 2 + 6; 3 + 5; 4 + 4; 5 + 3; 6 + 2; 7 + 1; 8 + 0) erfüllen nur 3 + 5 und 5 + 3 die Bedingung (2). Das führt auf die Zahlen
z = 353 und z = 533. Wegen 533 = 13 . 41 erfüllt die Zahl 533 nicht die Bedingung (1).
Also können höchstens die Zahlen 227 und 353 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.
Sie erfüllen sie tatsächlich; denn 227 und 353 sind Primzahlen.
(Beweis: 227 ist durch keine Primzahl $p < 17$ teilbar, und es gilt $17^2 > 227$,
353 ist durch keine Primzahl $p < 19$ teilbar, und es gilt $19^2 > 353$).
Ihre Ziffern 2, 2, 7 bzw. 3, 5, 3 sind ebenfalls Primzahlen. Das gilt auch für ihre Quersumme 11. Schließlich ist die Quersumme 2 von 11 eine Primzahl, wie es gefordert war.

## Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 9 Gesamtpunktzahl: 40

| | |
|---|---|
| 180921 | 8 Punkte |
| | |
| **180922** | |
| Entscheidung zu (1) mit Beispiel | 3 Punkte |
| Entscheidung zu (2) mit Beispiel | 3 Punkte |
| Entscheidung zu (3) mit Begründung | 5 Punkte |
| | 11 Punkte |
| | |
| **180923** | |
| Begründete Aussagen: | |
| $\overline{AC} = 2r$ | 3 Punkte |
| $\overline{AB} = r$ | 2 Punkte |
| Angabe des Umfangs | 1 Punkt |
| Angabe des Flächeninhalts | 2 Punkte |
| Angabe der Höhenlänge | 2 Punkte |
| | 10 Punkte |
| | |
| **180924** | |
| Begründete Aussagen: | |
| in z können nur die Ziffern 2,3,5 und 7 auftreten | 1 Punkt |
| in z können nur die Endziffern 3 und 7 auftreten | 1 Punkt |
| z' kann nur eine der Zahlen 11;13;17 und 19 sein | 2 Punkte |
| z' kann nur 11 sein | 2 Punkte |
| Diskussion Fall Endziffer 7 bzw. 3 | 2 Punkte |
| Diskussion des anderen Falles | 1 Punkt |
| Angabe der Zahlen 227 und 353 | 1 Punkt |
| Überprüfung der Bedingungen | 1 Punkt |
| | 11 Punkte |