A 8;I

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

180831

Im Inneren eines spitzwinkligen Dreiecks ABC, dessen Innenwinkel die Größen α, β, γ haben, sei ein Punkt P so gelegen, daß $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ gilt. Die Größen der Winkel $\sphericalangle$ PAB, $\sphericalangle$ PBC bzw. $\sphericalangle$ PAC seien mit δ, ε bzw. η bezeichnet.

a) Berechne δ, ε und η für den Fall, daß $\alpha = 70^\circ$ und $\beta = 80^\circ$ gilt!

b) Ermittle eine Formel für δ in Abhängigkeit von α, β und γ, ebenso eine Formel für ε und eine Formel für η!

180832

Von einem Dreieck ABC wird gefordert, daß für die Länge a der Seite BC, die Länge c der Seite AB, die Länge w_α der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle$ BAC und für die Größe β des Winkels $\sphericalangle$ ABC die Beziehungen

$$a : c = 2 : 3,$$
$$w_\alpha = 6 \text{ cm},$$
$$\beta = 35^\circ$$

gelten.

a) Konstruiere ein solches Dreieck und beschreibe deine Konstruktion!

b) Beweise, daß jedes so konstruierte Dreieck die gestellten Forderungen erfüllt! Eine Analysis und eine Determination werden nicht verlangt.

A 8;I

180833

Jürgen ist im Ferienlager und will für seine Gruppe Brause zu 0,21 M je Flasche einkaufen. Er nimmt kein Bargeld, sondern nur leere Flaschen mit. Für das eingelöste Pfandgeld (0,30 M für jede leere Flasche) kauft er möglichst viele Flaschen Brause, wobei er für jede volle Flasche außer dem Preis von 0,21 M auch 0,30 M Pfand zu zahlen hat. Es stellt sich heraus, daß er sieben Flaschen weniger erhält, als er abgegeben hat. Außerdem bekommt er noch Geld zurück.

Ermittle alle Möglichkeiten, wieviele leere Flaschen Jürgen mitgenommen haben könnte und wieviel Geld er dann zurückerhielt!

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

180834

Beweise folgenden Satz:
Ist p eine Primzahl größer als 3, so ist die Zahl $(p-1)(p+1)$ durch 24 teilbar.

180835

Zum Experimentieren wird eine 30 %ige Salzlösung benötigt. Vorhanden sind aber lediglich 2 Liter 10 %iger Salzlösung sowie eine Flasche mit 42 %iger Salzlösung.
Ermittle, wieviel Liter 42 %ige Salzlösung den 2 Litern 10 %iger Salzlösung zuzusetzen sind, damit eine 30 %ige Salzlösung entsteht!

180836

Es sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck, d die Länge des Durchmessers seines Umkreises , a bzw. b die Längen der Seiten BC bzw. AC und schließlich h die Länge der auf AB senkrecht stehenden Höhe.
Beweise, daß dann stets $d = \frac{a.b}{h}$ gilt!

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

180831) Lösung: **6 Punkte**

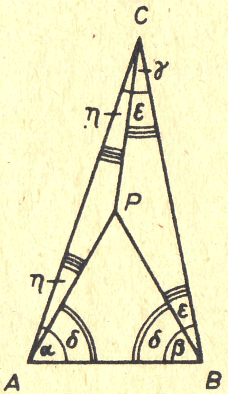

Abb. L 831

b) Da die Dreiecke ABP, BCP und CAP nach Voraussetzung gleichschenklig sind, gilt laut Basiswinkelsatz

$\overline{\sphericalangle PBA} = \overline{\sphericalangle PAB} = \delta$,
$\overline{\sphericalangle PCB} = \overline{\sphericalangle PBC} = \varepsilon$,
$\overline{\sphericalangle PAC} = \overline{\sphericalangle PCA} = \eta$.

Da P im Inneren des Dreiecks liegt, folgt hieraus

$\alpha = \delta + \eta$,
$\beta = \delta + \varepsilon$,
$\gamma = \varepsilon + \eta$, also
$\alpha + \beta - \gamma = 2\delta$, $\delta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)$ und analog
$\varepsilon = \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha)$, $\eta = \frac{1}{2}(\gamma + \alpha - \beta)$.

a) Nach dem Satz über die Innenwinkelsumme, angewandt auf das Dreieck ABC, gilt

$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 70^\circ - 80^\circ = 30^\circ$. Folglich gilt

$\delta = \frac{1}{2}(70^\circ + 80^\circ - 30^\circ) = 60^\circ$, $\varepsilon = \frac{1}{2}(80^\circ + 30^\circ - 70^\circ) = 20^\circ$,

$\eta = \frac{1}{2}(30^\circ + 70^\circ - 80^\circ) = 10^\circ$.

180832) Lösung: 7 Punkte

a) (1) Man konstruiert eine Strecke AB', deren Länge das Dreifache einer beliebig gewählten Länge t ist.

(2) In B' trägt man an den Strahl aus B' durch A einen Winkel der Größe 35° an.

(3) Auf seinem freien Schenkel trägt man von B' aus diejenige Strecke B'C' ab, deren Länge das Zweifache von t ist.

(4) Man konstruiert den Strahl s, der den Winkel $\sphericalangle$ B'AC' halbiert.

(5) Auf s trägt man von A aus die Strecke AD der Länge 6 cm ab.

(6) Man konstruiert die Parallele durch D zu B'C'. Sie schneidet den Strahl aus A durch B' in einem Punkt B und den Strahl aus A durch C' in einem Punkt C.

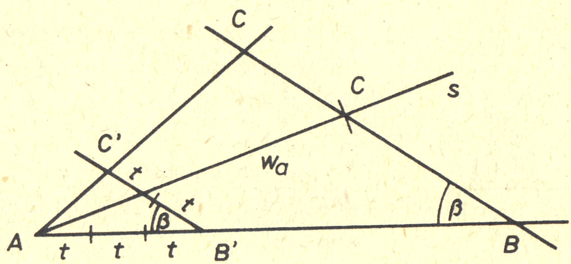

Abb. L 832

b) Ist $\triangle$ABC auf diese Weise konstruiert, so folgt:

Nach (6) ist BC $\parallel$ B'C', also

$\overline{\sphericalangle ABC} = \overline{\sphericalangle AB'C'}$ (Stufenwinkel an Parallelen)

$= 35^\circ$. (nach (2)).

Nach (4) ist AD Halbierende des Winkels $\sphericalangle$ B'AC', der wegen (6) mit dem Winkel $\sphericalangle$ BAC zusammenfällt. Ferner hat AD nach (5) die Länge 6 cm. Nach einem Teil des Strahlensatzes gilt wegen BC $\parallel$ B'C'

$\overline{BC} : \overline{AB} = \overline{B'C'} : \overline{AB'}$ und daher nach (1), (3)

$= 2t : 3t$

$= 2 : 3$.

Damit sind alle geforderten Eigenschaften für $\triangle$ ABC nachgewiesen.

180833) Lösung: 7 Punkte

Jürgen habe x leere Flaschen mitgenommen, er habe y Pfennig zurückerhalten. Somit bezahlte Jürgen einen Betrag von $30x - y$, und er erhielt dafür $x - 7$ volle Flaschen zu 0,51 M.

Es gilt folglich:

(1) $30x - y = 51(x - 7)$ mit $0 < y < 51$, da Jürgen im Falle $y = 51$ noch weitere Flaschen erhalten könnte und im Falle $y = 0$ kein Geld herausbekäme.

Aus (1) erhält man:

$y = 357 - 21x = 7(51 - 3x)$, also $0 < 51 - 3x < \frac{51}{7}$. Aus $0 < 51 - 3x$ folgt $x < 17$. Aus $51 - 3x < \frac{51}{7}$ folgt $3x > \frac{6.51}{7}$, also $x > \frac{102}{7} > 14$. Daher verbleiben nur die Möglichkeiten $x = 15$ und $x = 16$.

Für $x = 15$ gilt $y = 42$ und für $x = 16$ folgt $y = 21$.

1. Möglichkeit: Jürgen hatte 15 leere Flaschen mitgenommen, das entspricht 4,50 M Pfandgeld. Er kaufte $15-7 = 8$ Flaschen Brause und mußte dafür 4,08 M bezahlen. Er erhielt 0,42 M zurück, wofür er keine weitere Flasche Brause kaufen konnte.

2. Möglichkeit: Jürgen hatte 16 leere Flaschen mitgenommen, das entspricht 4,80 M Pfandgeld. Er kaufte $16-7 = 9$ Flaschen Brause und mußte dafür 4,59 M bezahlen. Er erhielt 0,21 M zurück, wofür er ebenfalls keine weitere Flasche Brause kaufen konnte.

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

180834) Lösung: **6 Punkte**

Die natürlichen Zahlen $p-1$, p, $p+1$ sind drei aufeinanderfolgende Zahlen. Von diesen ist genau eine durch 3 teilbar. Die Zahl p kann dies als eine Primzahl $p > 3$ nicht sein, also muß es eine der Zahlen $p-1$, $p+1$ sein. Folglich ist das Produkt $(p-1)(p+1)$ durch 3 teilbar.
Da p eine Primzahl und größer als 3 ist, ist p ungerade; $p-1$ und $p+1$ sind daher zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen. Von diesen Zahlen ist stets genau eine durch 2 und die andere durch 4 teilbar. Folglich ist das Produkt $(p-1)(p+1)$ durch 8 teilbar. Da 3 und 8 teilerfremd sind, ist somit $(p-1)(p+1)$ durch $3 \cdot 8 = 24$ teilbar, w. z. b. w.

180835) Lösung: **7 Punkte**

Angenommen, beim Zusetzen von x Litern 42 %iger Salzlösung zu den 2 Litern 10 %iger Salzlösung bilden die entstehenden $(x+2)$ Liter eine 30 %ige Salzlösung.
Es gilt dann:

2 Liter 10 %ige Salzlösung enthalten	$0{,}20$	Liter Salz
x Liter 42 %ige Salzlösung enthalten	$0{,}42x$	Liter Salz
$(x+2)$ Liter 30 %ige Salzlösung enthalten	$0{,}30(x+2)$	Liter Salz

Da die Salzmenge im Lösungsgemisch stets gleich der Summe der Salzmengen in den gemischten Lösungen ist, muß gelten:

$$\begin{aligned} 0{,}20 + 0{,}42x &= 0{,}30(x + 2) \\ 20 + 42x &= 30x + 60 \\ 12x &= 40 \\ x &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Man muß also $\frac{10}{3}$ Liter 42 %ige Salzlösung zusetzen, um die geforderte 30 %ige Salzlösung zu erhalten.
Probe: Man erhält als Mischung 2 Liter + $\frac{10}{3}$ Liter = $\frac{16}{3}$ Liter
einer Lösung mit folgendem Salzgehalt:

2 Liter 10 %ige Salzlösung enthalten 0,20 Liter Salz

$\frac{10}{3}$ Liter 42 %ige Salzlösung enthalten 1,40 Liter Salz

Das sind zusammen 1,60 Liter Salz

Von $\frac{16}{3}$ Litern Gesamtflüssigkeit sind diese 1,60 Liter Salz aber $1{,}60 : \frac{16}{3} \cdot 100\ \% = 30\ \%$, wie es verlangt war.

180836) Lösung: 7 Punkte

Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises, D der Fußpunkt der auf AB senkrecht stehenden Höhe und E der Schnittpunkt der Verlängerung von CM über M hinaus mit dem Kreis k.

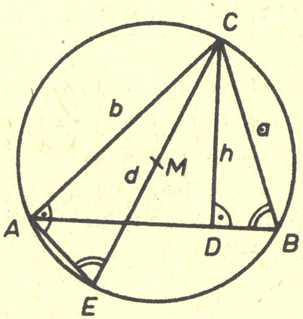

Abb. L 836

Da $\triangle$ABC spitzwinklig ist, liegt D zwischen A und B, und E ist von A und B verschieden.[1)] Die Dreiecke CBD und CEA sind einander ähnlich, da sie in den rechten Winkeln $\sphericalangle$ CDB und $\sphericalangle$ CAE (Satz des Thales) sowie in den Winkeln $\sphericalangle$ ABC und $\sphericalangle$ CEA (Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen) übereinstimmen. Ähnliche Dreiecke stimmen in den Verhältnissen gleichliegender Seiten überein, deshalb ist

$$d : a = b : h, \text{ also}$$

$$d = \frac{a \cdot b}{h}, \text{ w. z.b.w.}$$

---

1) Eine Begründung hierfür wird vom Schüler nicht verlangt.