Umlauft

L 7;I

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

180731) Lösung: 6 Punkte

Angenommen, es gibt eine Dirks Angaben entsprechende Verteilung r Getränke auf die Gefäße. Dann gibt es - da die Kanne nach dem Umstellen zwischen zwei anderen Gefäßen steht, wobei das Teegefäß jeweils unmittelbar links, das Milchgefäß unmittelbar rechts neben der Kanne steht, - genau die nachfolgend angegebenen drei Möglichkeiten für die Reihenfolge der Gefäße:

(1)	Flasche Tee	Kanne	Krug Milch	Tasse	Becher
(2)	Flasche	Krug Tee	Kanne	Tasse Milch	Becher
(3)	Flasche	Krug	Tasse Tee	Kanne	Becher Milch

Die Möglichkeiten (1) und (3) scheiden aus, da sie der Angabe widersprechen, daß sich in dem in der Mitte stehenden Gefäß Kaffee befindet.
Somit verbleibt nur die Möglichkeit (2), und dabei ist nach der eben genannten Angabe die Kanne mit Kaffee gefüllt. Hiernach und außerdem das Limonadengefäß unmittelbar neben dem Milchgefäß steht, verbleibt als einzig mögliche mit Dirks Angaben übereinstimmende Verteilung die folgende:
Die Flasche enthält Most, der Krug Tee, die Kanne Kaffee, die Tasse Milch und der Becher Limonade. Für diese Verteilung treffen alle von Dirk gemachten Angaben zu. Sie ist daher die einzige Verteilung der gesuchten Art.

180732) Lösung: 6 Punkte

Es seien β, γ die Größen von $\sphericalangle$ ABC bzw. $\sphericalangle$ BCA. Die Berührungspunkte von k mit den Verlängerungen von AC bzw. AB seien Q bzw. R (s. Abb. L 732).

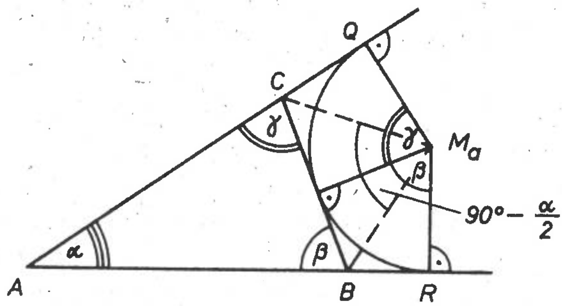

Abb. L 732

Dann gilt für die Nebenwinkel von $\sphericalangle$ ABC bzw. $\sphericalangle$ ACB:

$$\overline{\sphericalangle\, CBR} = 180^\circ - \beta \quad \text{und} \quad \overline{\sphericalangle\, BCQ} = 180^\circ - \gamma.$$

Da M_a als Mittelpunkt eines Kreises, der beide Schenkel des Winkels $\sphericalangle$ CBR berührt, auf der Halbierenden dieses Winkels liegt, gilt:

$$\overline{\sphericalangle\, CBM_a} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}. \qquad (2)$$

Entsprechend gilt $\overline{\sphericalangle\, BCM_a} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. (3)

Daraus folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel, angewandt auf das Dreieck BM_aC:

$$\overline{\sphericalangle\, BM_aC} = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

Nach dem gleichen Satz, angewandt auf das Dreieck ABC, gilt:

$$\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha, \text{ also } \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \text{ woraus dann}$$

$$\overline{\sphericalangle\, BM_aC} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \text{ folgt.}$$

Hinweis zur Korrektur:

Statt der hier verwendeten Formulierung über den Mittelpunkt eines Kreises, der beide Schenkel eines Winkels berührt, kann z. B. auch die Formulierung verwendet werden, daß der Mittelpunkt des (eindeutig bestimmten) Ankreises von $\triangle$ ABC an BC auf den Halbierenden der Außenwinkel bei B und C liegt. Beide Sätze gehören zwar nicht zum obligatorischen Schulstoff, werden aber häufig

z. B. in Arbeitsgemeinschaften behandelt. Sie können vom Schüler entweder ohne Beweis zitiert oder (z. B. mit Hilfe von Kongruenzsätzen) bewiesen werden.

Hinweis auf einen weiteren Lösungsweg: Es läßt sich zeigen, daß die Vierecke $PBRM_a$, $QCPM_a$ und ABM_aQ Drachenvierecke sind, deren Winkel an der Spitze von der entsprechenden Diagonalen jeweils halbiert wird. Hieraus folgt (2), (3) usw., wie oben.

180733) Lösung: 7 Punkte

I. Angenommen, es gibt eine Gerade g, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann schneidet sie die Schenkel des gegebenen Winkels in Punkten, die mit B bzw. D bezeichnet sind, und es ist ferner P Mittelpunkt von BD. Der Scheitelpunkt des Winkels sei A. Dann gibt es genau einen Punkt C auf dem Strahl von A durch P, so daß P Mittelpunkt der Strecke AC ist. Daher halbieren sich die Strecken BD und AC, d. h., das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm.
Folglich kann eine Gerade g nur dann alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen, wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man zeichnet vom Scheitelpunkt A des gegebenen Winkels einen Strahl durch P, auf dem man von A aus eine Strecke der Länge $2\overline{AP}$ abträgt. Ihr anderer Endpunkt sei C genannt.
(2) Durch C zieht man die Parallelen zu den Schenkeln des gegebenen Winkels. Ihre Schnittpunkte mit den jeweils anderen Schenkeln seien B bzw. D.
(3) Man zeichnet die Gerade g durch B und D.

III. Jede so konstruierte Gerade g erfüllt alle Bedingungen der Aufgabe.
Beweis: Nach Konstruktion gilt $AD \parallel BC$ und $AB \parallel CD$ sowie $\overline{AP} = \overline{PC}$. Folglich ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm und P der Mittelpunkt seiner Diagonalen AC. Daher geht auch die andere Diagonale BD durch P und wird von P halbiert.

IV. Da die Konstruktionsschritte (1) bis (3) stets eindeutig ausführbar sind, gibt es genau eine Gerade der geforderten Art. (Abb. L 733)

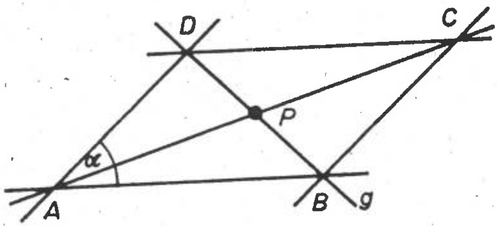

Abb. L 733

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

180734) Lösung: **7 Punkte**

In der Ausgangslösung befinden sich genau 4 % der gelösten Substanz, das ist bei 25 kg Lösung genau 1 kg.
Diese Menge stellt nach dem Entzug einer Wassermenge genau dann 10 % der neuen Lösung dar, wenn die neue Lösung insgesamt 10 kg umfaßt.
Somit beträgt genau dann, wenn man der Ausgangslösung 15 kg Wasser entzogen hat, sein Anteil 90 %, wie es gefordert war.
Zu ermitteln ist demnach, wieviel Prozent von 24 kg Wasser 15 kg Wasser sind. Für diesen gesuchten Prozentsatz x gilt die Beziehung

$$x : 100\,\% = 15 : 24$$

und damit

$$x = \frac{1500}{24}\,\% = 62{,}5\,\%$$

Demzufolge sind 62,5 % des in der Ausgangslösung enthaltenen Wassers dieser Lösung zu entziehen, um eine neue Lösung mit 90 % Wasseranteil zu erhalten.

180735) Lösung: **7 Punkte**

Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC. Wir unterscheiden nun die folgenden beiden Fälle:
(a) M liegt im Innern oder außerhalb des Dreiecks ABC;
(b) M liegt auf einer der drei Seiten des Dreiecks ABC.
Im Falle (a) sind ABM, BCM und ACM nichtentartete Dreiecke. Wegen $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = r$ gilt daher nach der Dreiecksungleichung stets

(1) $2r = \overline{MA} + \overline{MB} > \overline{AB}$,
(2) $2r = \overline{MA} + \overline{MC} > \overline{AC}$,
(3) $2r = \overline{MB} + \overline{MC} > \overline{BC}$.

Durch Addition erhält man daraus

(4) $6r > \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = u$, also
$r > \frac{u}{6}$.

Im Falle (b) entartet genau eines der drei betrachteten Dreiecke zu einer Strecke; an die Stelle genau einer der drei Ungleichungen tritt daher die entsprechende Gleichung. Auch in diesem Falle erhält man aus dieser Gleichung und den beiden restlichen Ungleichungen durch Addition die Ungleichung (4). Da mit (a), (b) eine vollständige Fallunterscheidung getroffen wurde, ist damit der geforderte Beweis erbracht.

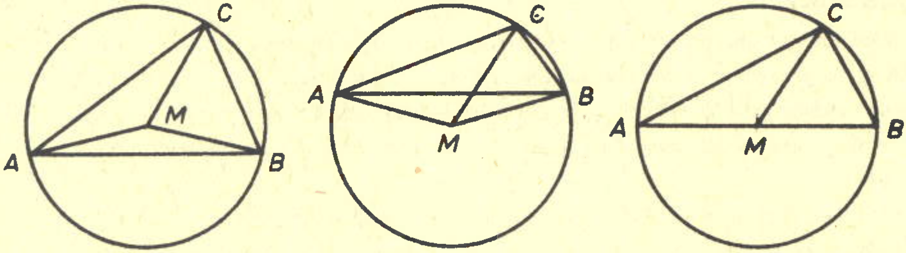

Abb. L 735

180736) Lösung: 7 Punkte

Angenommen, eine rationale Zahl a habe die genannte Eigenschaft. Dann gilt

$$a \cdot |a| = a + |a| \quad . \qquad (1)$$

Für die Zahl a trifft nun genau einer der folgenden zwei Fälle zu:

1. Fall: $a \geq 0$.

Dann gilt $|a| = a$, also folgt aus (1)

$$a^2 = 2a. \qquad (2)$$

Hiernach verbleiben im 1. Fall nur die Möglichkeiten, daß entweder $a = 0$ gilt oder, falls $a \neq 0$ ist, aus (2) weiter $a = 2$ folgt.

2. Fall: $a < 0$.

Dann gilt $|a| = -a$, und es folgt einerseits $a \cdot |a| \neq 0$, andererseits $a + |a| = 0$. Die Annahme, daß a die Eigenschaft (1) hat, führt somit im 2. Fall auf einen Widerspruch.

Folglich können nur die beiden Zahlen 0 und 2 die genannte Eigenschaft haben. Tatsächlich gilt $0 \cdot |0| = 0 = 0 + |0|$ sowie $2 \cdot |2| = 4 = 2 + |2|$.

Also sind genau die Zahlen 0 und 2 die gesuchten Zahlen.