Umlauf+

L 7

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 7

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

180721) Lösung: 10 Punkte

Wir bezeichnen die Namen der Lehrer abkürzend mit S, U bzw. K, die der Fächer mit d, r, g, m, p bzw. b. Dabei bedeute $S = d$, daß Schulze das Fach Deutsch unterrichtet; $S \neq b$ bedeute, daß Schulze nicht im Fach Biologie unterrichtet; usw.

Aus (1) und (2) folgt $S \neq b$ und $S \neq p$; aus dem ersten Teil von (3) folgt analog $S \neq r$ und $S \neq m$. Wegen (1) muß daher $\underline{S = d}$ und $\underline{S = g}$ gelten. Ebenfalls wegen (1) gilt $K \neq d$ und $K \neq g$, und da aus dem zweiten Teil von (3) die Beziehungen $K \neq b$ und $K \neq r$ folgen, gilt wegen (1) mithin $\underline{K = m}$ und $\underline{K = p}$. Ebenfalls wegen (1) folgt schließlich $\underline{U = r}$ und $\underline{U = b}$.

Damit ist gezeigt, daß auf Grund der Angaben nur folgende Verteilung möglich ist:

Herr Schulze unterrichtet Deutsch und Geschichte,
Herr Ufer unterrichtet Russisch und Biologie,
Herr Krause unterrichtet Mathematik und Physik.

(Folgende Tabelle veranschaulicht den Lösungsweg. Dabei bedeute "(2)-nein" im Feld S/b, daß Schulze wegen (2) nicht in Biologie unterrichtet; usw.)

	d	r	g	m	p	b
S	ja	(3a)-nein	ja	(3a)-nein	(2)-nein	(2)-nein
U	(1)-nein	ja	(1)-nein	(1)-nein	(1)-nein	ja
K	(1)-nein	(3b)-nein	(1)-nein	ja	ja	(3b)-nein

180722) Lösung: 8 Punkte

Angenommen, es gibt einen solchen Bruch $\frac{p}{q}$ mit natürlichen Zahlen p, q und $q \neq 0$. Wegen (1) gilt dann $\frac{p}{q} = \frac{2}{5}$. Daraus folgt

$p = 2n$ und $q = 5n$ (mit $n \in N$, $n \neq 0$), also $p + q = 7n$, was mit $7 \mid p+q$ gleichbedeutend ist. Da die Zahl 49 die einzige durch 7 teilbare zweistellige Quadratzahl ist, kann wegen (2) nur $p+q = 49$ und somit $n = 7$, $p = 14$, $q = 35$ gelten.

Wenn es also einen Bruch mit den geforderten Eigenschaften gibt, dann kann dies nur der Bruch $\frac{14}{35}$ sein.

Tatsächlich erfüllt $\frac{14}{35}$ beide Bedingungen; denn es gilt $\frac{14}{35} = 0{,}4$ und $14 + 35 = 49 = 7^2$.

Also hat genau der Bruch $\frac{14}{35}$ die geforderten Eigenschaften.

<u>180723) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

Nach Voraussetzung ist das Dreieck AMC gleichschenklig mit $\overline{AM} = \overline{MC} = r$, also gilt $\overline{\sphericalangle MAC} = \overline{\sphericalangle ACM} = 36^\circ$. (1)

Da $\sphericalangle DCA$ und $\sphericalangle MAC$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind, gilt $\overline{\sphericalangle DCA} = \overline{\sphericalangle MAC} = 36^\circ$. (2)

Aus (1) und (2) folgt

$$\overline{\sphericalangle DCA} + \overline{\sphericalangle ACM} = \overline{\sphericalangle DCM} = 72^\circ. \quad (3)$$

Weiterhin ist nach Voraussetzung das Dreieck MCD gleichschenklig mit $\overline{MD} = \overline{MC} = r$; hiernach und wegen (3) gilt

$$\overline{\sphericalangle MDC} = \overline{\sphericalangle DCM} = 72^\circ.$$

Daraus folgt $\overline{\sphericalangle CMD} = 36^\circ$, w. z. b. w.

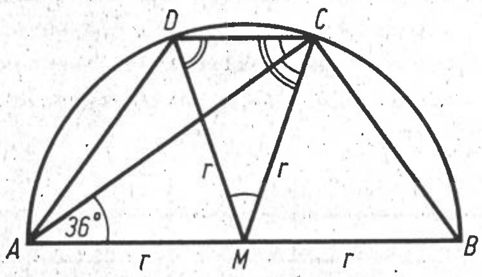

Abb. L 723

<u>180724) Lösung:</u> <u>12 Punkte</u>

Für den Flächeninhalt A_1 des Dreiecks FBE gilt laut Voraussetzung und nach der Inhaltsformel für Dreiecke

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 \text{ cm}^2 = 150 \text{ cm}^2.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks DBE beträgt laut Voraussetzung

2 . A_1, so daß für $\overline{BD}$ folgt:

$$\frac{1}{2}\ \overline{BD}\ .\ \overline{BE} = 300\ cm^2,\ d.\ h.\ \overline{BD} = 30\ cm.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks DBC beträgt laut Voraussetzung 3 . A_1, so daß für $\overline{BC}$ folgt

$$\frac{1}{2}\ \overline{BC}\ .\ \overline{BD} = 450\ cm^2,\ d.\ h.\ \overline{BC} = 30\ cm.$$

Analog folgt für $\overline{AB}$:

$$\frac{1}{2}\ \overline{AB}\ .\ \overline{BC} = 600\ cm^2,\ \overline{AB} = 40\ cm$$

und somit $\overline{AD} = \overline{AB} - \overline{BD} = 40\ cm - 30\ cm = 10\ cm.$

ie Länge der Strecke AD beträgt 10 cm.

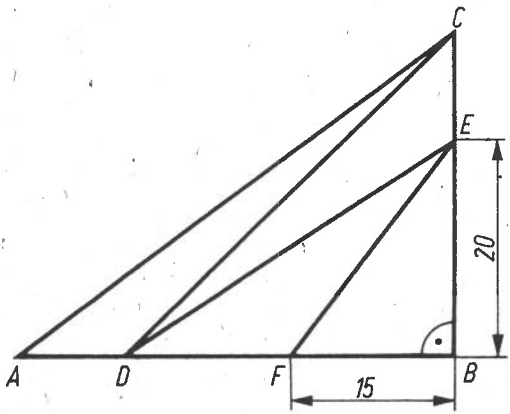

Abb. L 724

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 7 Gesamtpunktzahl: 40

180721

Folgerung aus (1) und (2)	1 Punkt
Folgerung aus (3) $S \neq r$ und $S \neq m$	2 Punkte
Erkennen, daß $S = d$ und $S = g$ gelten	2 Punkte
Erkennen $K \neq d$ und $K \neq g$	1 Punkt
Erkennen $K \neq b$ und $K \neq r$	1 Punkt
Erkennen wegen (1) $K = m$ und $K = p$	1 Punkt
Erkennen, daß wegen (1) $U = r$ und $U = b$ folgt	1 Punkt
Zusammenfassung	1 Punkt
	10 Punkte

180722

Erkennen, daß $\frac{p}{q} = \frac{2}{5}$ gilt	1 Punkt
Folgerung $p = 2n$ und $q = 5n$	1 Punkt
Folgerung $p + q = 7n$	1 Punkt
Erkenntnis, daß $7 \mid p + q$	1 Punkt
Finden der Zahl 49	1 Punkt
$p = 14$, $q = 35$	1 Punkt
Finden des geforderten Bruches $\frac{14}{35}$	1 Punkt
Probe	1 Punkt
	8 Punkte

180723

Skizze und festlegen der Stücke	2 Punkte
Erkenntnis von (1)	2 Punkte
Erkenntnis von (2)	2 Punkte
Erkenntnis von (3)	2 Punkte
$\overline{\sphericalangle CMD} = 36^\circ$	2 Punkte
	10 Punkte

180724

1. Lösungsweg

Skizze	2 Punkte
Flächengleichheit der Dreiecke DFE und FBE mit Begründung	2 Punkte
$\triangle DBC = 3 \cdot \triangle ADC$	2 Punkte
Begründung dazu	2 Punkte
$\overline{DB} = 3 \cdot \overline{AD}$	2 Punkte
$\overline{AD} = 10$ cm	2 Punkte
	12 Punkte

2. Lösungsweg

Skizze	2 Punkte
Flächeninhalt von $\triangle$ FBE	2 Punkte
$\overline{BD} = 30$ cm	2 Punkte
$\overline{BC} = 30$ cm	2 Punkte
$\overline{AB} = 40$ cm	2 Punkte
AD = 10 cm	2 Punkte
	12 Punkte