korr.
nicht

A 11/12;I XVII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

171241

Sind f und g im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ stetige Funktionen, so seien Zahlen $d_1(f,g)$ und $d_2(f,g)$ wie folgt definiert:
$d_1(f,g) = \max |f(x) - g(x)|$,
$d_2(f,g)$ ist der in Flächeneinheiten eines rechtwinkligen Koordinatensystems ausgedrückte Inhalt derjenigen Fläche, die durch die Bilder der Funktionen f und g sowie die beiden Geraden $x = -1$ und $x = 1$ begrenzt wird. (Dabei werde der Inhalt jeder Teilfläche, unabhängig von ihrem Umlaufsinn, als positiv aufgefaßt.)
Es seien nun f_n $(n=1,2,\ldots)$ und h die im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ durch $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(1-x)x^{k-1}$ und $h(x) = 1$ definierten Funktionen.

a) Man ermittle $\lim_{n\to\infty} d_1(f_n,h)$, falls dieser Grenzwert existiert.

b) Man ermittle $\lim_{n\to\infty} d_2(f_n,h)$, falls dieser Grenzwert existiert.

171242

Es seien g und h die in der (zweielementigen) Menge $\{1,-1\}$ als Definitionsbereich durch

$g(1) = 1, \quad g(-1) = -1$: (1)
$h(1) = -1, \quad h(-1) = 1$ definierten Funktionen. (2)

Ferner seien f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 Funktionen, von denen einige gleich g und die übrigen gleich h sind.

Für diese Funktionen möge gelten:

$$f_1(1) = -1, \quad f_6(1) = f_7(1) = 1: \tag{3}$$

$$f_3(f_4(1)) = -1: \tag{4}$$

$$f_1(f_2(f_3(f_4(f_5(f_6(f_7(1))))))) = -1. \tag{5}$$

Man beweise, daß in allen Fällen, in denen diese Bedingungen erfüllt sind, die Anzahl derjenigen f_i, die gleich g sind, die gleiche ist, und gebe diese Anzahl an.

171243

a) Man gebe alle Möglichkeiten an, ein gegebenes Dreieck D in drei Dreiecke D_1, D_2, D_3 zu zerlegen.

b) Man beweise: Ist ein Dreieck D in drei zueinander ähnliche Dreiecke D_1, D_2, D_3 zerlegbar, so ist es gleichschenklig oder rechtwinklig.

A 11/12;II XVII. Olympiade Junger Mathematiker der
Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

171244

Definition: Es sei mit $d(X,Y)$ der Abstand zweier Punkte X,Y einer Punktmenge $\mathfrak{M}$ bezeichnet. Eine reelle Zahl d heißt Durchmesser von $\mathfrak{M}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für je zwei Punkte X,Y aus $\mathfrak{M}$ gilt $d(X,Y) \leq d$.
(2) Es gibt Punkte P,Q aus $\mathfrak{M}$, für die $d(P,Q) = d$ ist.

Aufgabe: Man beweise:

a) Wenn eine Kreisfläche mit dem Durchmesser d von einem beliebigen Streckenzug, der die Kreislinie genau in einem Punkt M und einem Punkt N schneidet, in zwei Teile zerlegt wird, dann hat eine dieser Teilflächen (jeweils einschließlich ihres Randes verstanden) ebenfalls den Durchmesser d.

b) Wenn ein Kugelkörper mit dem Durchmesser d von einer ebenen Schnittfläche ε_1 in zwei Teilkörper und danach einer dieser Teilkörper durch eine ebene Schnittfläche ε_2 wieder in zwei Teilkörper zerlegt wird, dann hat bei jeder derartigen Zerlegung eines Kugelkörpers in drei Teilkörper wenigstens einer dieser Teilkörper (jeweils einschließlich seiner Begrenzungsflächen verstanden) ebenfalls den Durchmesser d.

171245

Es sei $f_1, f_2, \ldots$ eine Folge von Funktionen, die für alle reellen Zahlen x definiert sind, und zwar durch

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 + 48},$$

$$f_{k+1}(x) = \sqrt{x^2 + 6f_k(x)} \quad \text{für } k = 1,2,3,\ldots .$$

Man ermittle für jedes $n = 1,2,3,\ldots$ alle reellen Zahlen x, die Lösungen der Gleichung

$$f_n(x) = 2x \text{ sind.}$$

30 06 75-1 (204)

korr.

A 11/12;II

Von den nachstehenden Aufgaben 1246 A und 1246 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

171246 A

Es sei n eine positive ganze Zahl, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sei ein n-Tupel reeller Zahlen mit $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$.

Man untersuche, ob es zu diesen gegebenen $a_1, \ldots, a_n$ eine reelle Zahl x derart gibt, daß die Zahl

$$z = |x-a_1| + |x-a_2| + \ldots + |x-a_n|$$

möglichst klein ist.

Gibt es ein derartiges x, so bestimme man alle reellen Zahlen x mit dieser Eigenschaft und gebe den zugehörigen minimalen Wert von z an.

171246 B

(a) Gegeben sei eine natürliche Zahl $n \geq 2$. Es sei u der Umkreis eines regelmäßigen 2n-Ecks $A_0A_1 \ldots A_{2n-1}$. Eine Menge aus drei Ecken A_i, A_j, A_k dieses 2n-Ecks heiße "einseitig", wenn es auf der Kreislinie u einen Halbkreisbogen h einschließlich seiner beiden Endpunkte gibt, der A_i, A_j und A_k enthält.

Man ermittle die Wahrscheinlichkeit w_n dafür, daß eine willkürlich gewählte Menge $M = \{A_i, A_j, A_k\}$ aus drei Ecken "einseitig" ist.

(b) Man ermittle den Grenzwert $\lim_{n \to \infty} w_n$, falls er existiert.

Hinweis: Ist m_n die Anzahl aller Mengen, die man aus je drei Ecken A_i, A_j, A_k des 2n-Ecks bilden kann, und ist g_n die Anzahl aller "einseitigen" unter ihnen, so ist die in (a) gesuchte Wahrscheinlichkeit definiert als

$$w_n = \frac{g_n}{m_n}.$$

korr.
nicht

L 11/12;I

XVII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

171241) Lösung: 5 Punkte

Die Funktionen f_n und h sind im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ stetig. Mit Hilfe der Summenformel für endliche geometrische Partialsummen ergibt sich, sofern $x \neq 1$ ist:

$$f_n(x) = (1 - x)\,\frac{x^n - 1}{x - 1}\,, \tag{1}$$

also

$$f_n(x) = 1 - x^n\,. \tag{2}$$

Wegen $f_n\,(1) = 0$ gilt die Beziehung (2) auch für $x = 1$.

Daher gilt $|f_n(x) - h(x)| = |1 - x^n - 1| = |x^n|$, also $d_1(f_n,h) = \max |x^n| = 1$.

Ferner ist die Definition von $d_2(f,g)$ gleichwertig mit $d_2(f,g) = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\,dx$; somit gilt $d_2(f_n,h) = \int_{-1}^{1} |x^n|\,dx$.

Da das Bild von $y = |x^n|$ für $-1 \leqq x \leqq 0$ durch Spiegelung an der y-Achse in das Bild von $y = x^n$ $(= |x^n|)$ für $0 \leqq x \leqq 1$ übergeht,

ist demnach $d_2(f_n,h) = 2 \cdot \int_0^1 x^n dx = 2 \cdot \frac{1^{n+1} - 0^{n+1}}{n + 1} = \frac{2}{n + 1}$.

Somit ergibt sich:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(f_n,h) = 1$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} d_2(f_n,h) = 0$

171242) Lösung: 6 Punkte

Wegen (1) und (2) gilt für $x = 1$ und $x = -1$

$g(x) = x,\ h(x) = -x.$

Nun sei für i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

$\varepsilon_i = 1$, falls $f_i = g$,

$\varepsilon_i = -1$, falls $f_i = h$,

Dann gilt für $x = 1, -1$ mithin $f_i(x) = \varepsilon_i x$.

Wegen (3) ist $\varepsilon_1 = -1,\ \varepsilon_6 = \varepsilon_7 = 1$. (6)

Ferner folgt aus (4), daß $\varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4 = -1$ gilt. (7)

Aus (5) folgt $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4 \cdot \varepsilon_5 \cdot \varepsilon_6 \cdot \varepsilon_7 = -1$, (8)

wegen (6) und (7) also $(-1) \cdot \varepsilon_2 \cdot (-1) \cdot \varepsilon_5 \cdot 1 \cdot 1 = -1$, (9)

d.h. $\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_5 = -1$.

Also sind unter den Zahlen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_7$ genau folgende gleich 1:

ε_6 ;

ε_7 ;

genau eine der Zahlen ε_3, ε_4;

genau eine der Zahlen ε_2, ε_5

Die Anzahl der f_i, die gleich g sind, ist also stets die gleiche, sie beträgt 4.

171243) Lösung: 8 Punkte

a) Liegt eine Zerlegung von D in drei Dreiecke D_1, D_2, D_3 vor, so sei eine Strecke, die Teil des Randes eines D_i, aber nicht Teil des Randes von D ist, eine "zerlegende Strecke" genannt. Hiernach gibt es genau folgende Möglichkeiten:

(1) Von jeder Ecke des Dreiecks D geht eine zerlegende Strecke aus. Dann kann von jeder Ecke auch nur eine zerlegende Strecke ausgehen, da bereits hierdurch mindestens drei Teilgebiete von D voneinander abgegrenzt werden. Damit sogar genau drei Teilgebiete entstehen, die sämtlich Dreiecke sind, müssen ferner die drei genannten zerlegenden Strecken in einem gemeinsamen Punkt im Innern von D enden (Abb. L 1243 a)

(2) Es gibt eine Ecke des Dreiecks D, von der keine zerlegende Strecke ausgeht.

Diese Ecke ist dann zugleich Ecke eines der D_i, etwa von D_1; ihre Gegenseite s in D_1 verläuft in D von Rand zu Rand.

(2.1.) Ein Endpunkt von s ist eine Ecke von D. Dann ist D durch s zerlegt in D_1 und ein weiteres Dreieck D', das in D_2 und D_3 zerlegt sein muß. Dies ist nur möglich durch eine Strecke von einer Ecke von D' zu einem inneren Punkt der Gegenseite. Ist diese Ecke zugleich die Ecke von D, die Endpunkt von s ist, so entsteht

eine Zerlegung wie in Abb. L 1243 b. Ist sie die Ecke von D (und D'), die nicht Endpunkt von s ist, so entsteht eine Zerlegung wie in Abb. L 1243 c.
Ist sie die Ecke von D', die nicht Ecke von D ist, so entsteht eine Zerlegung wie in Abb. L. 1243 d.

(2.2.) Kein Endpunkt von s ist Ecke von D.
Dann ist D durch s zerlegt in D_1 und ein Viereck V, das in D_2 und D_3 zerlegt sein muß. Dies ist nur möglich durch eine Diagnonale von V. Es entsteht bis auf Bezeichnungsänderung eine Zerlegung wie in Abb. L 1243 d.

b) Angenommen nun, in einer der Abbildungen L 1243 a bis d seien D_1, D_2, D_3 zueinander ähnlich. Dann folgt:

Zu Abb. L 1243 a: Da die Innenwinkelgrößen der D_i bei P die Summe 360° haben, müssen zwei dieser Winkel stumpf sein. Seien etwa $\sphericalangle$ BPC, $\sphericalangle$ CPA stumpf. Wegen der Ähnlichkeit von D_1,D_2 ist $\sphericalangle$ BPC einem Innenwinkel in D_2 kongruent; dies kann folglich nur der einzige stumpfe Winkel $\sphericalangle$ CPA sein. Auch in D_3 ist ein Innenwinkel hierzu kongruent. Wäre es $\sphericalangle$ BAP oder $\sphericalangle$ ABP, so folgte der Widerspruch AB $\parallel$ CP bzw. BA $\parallel$ CP.

Also gilt $\overline{\sphericalangle \text{ BPC}} = \overline{\sphericalangle \text{ CPA}} = \overline{\sphericalangle \text{ APB}} = 120^\circ$.
Angenommen, es wäre $\overline{BP} = k \cdot \overline{AP}$ mit $k \neq 1$. Dann wäre wegen der Ähnlichkeit von D_3 und D_1 entweder $\overline{BP} = k \cdot \overline{CP}$ oder $\overline{CP} = k \cdot \overline{BP}$
Das ergäbe den Widerspruch $\overline{CP} = \overline{AP}$ bzw. den Widerspruch $\overline{CP} = k^2 \cdot \overline{AP}$ gegen die Ähnlichkeit von D_2,D_3. Also gilt $\overline{AP} = \overline{BP}$ und ebenso $\overline{BP} = \overline{CP}$. Daher ist das Dreieck D gleichseitig.

Zu Abb. L 1243 b,c,d: Bei den Punkten P und Q in Abb. L 1243 b,c sowie bei Punkt Q in Abb. L 1243 d liegt jeweils ein Punkt X auf zwei Strecken u,v, die so zum Rand zweier Dreiecke D_i,D_j gehören, wie Abb. L 1243 e zeigt.

Angenommen, es wäre nicht u $\perp$ v. Dann hätte o.B.d.A. Dreieck D_i bei X einen stumpfen Innenwinkel. Wegen der Ähnlichkeit hätte D_j einen hierzu kongruenten Innenwinkel, der folglich bei einer von X verschiedenen Ecke liegen müßte. Damit ergäbe sich der Widerspruch, daß eine zu u oder v parallele Seite in D_j vorkäme.

Also folgt in den angegebenen Fällen $u \perp v$.

Abb. L 1243 b und L 1243 c scheiden damit aus, da D_2 nicht bei P und Q rechte Winkel haben kann.

Abb. L 1243 d: Da D_2 und D_3 bei Q rechtwinklig sind, hat wegen der Ähnlichkeit auch D_1 einen rechten Winkel.

1. Fall: D_1 ist bei P rechtwinklig.
Dann ist $\triangle$ BCP ein rechtwinkliges, durch seine Höhe PQ auf der Hypothenuse in D_2, D_3 zerlegtes Dreieck. Darin sind $\sphericalangle$ QCP, $\sphericalangle$ QPB kongruent. Ist in D_1 hierzu $\sphericalangle$ PBA kongruent, so ist $\triangle$ABC bei B rechtwinklig. Ist in D_1 aber $\sphericalangle$ PAB zu den vorgenannten Winkeln kongruent, so ist $\triangle$ ABC gleichschenklig mit $\overline{AB} = \overline{CB}$.

2. Fall: D_1 ist bei B rechtwinklig.
Wären von den drei Innenwinkeln der D_i bei P zwei nicht zueinander kongruent, so wären sie wegen der Ähnlichkeit der betreffenden, jeweils an Ecken $\neq$ P rechtwinkligen D_i Komplementwinkel voneinander, und es ergäbe sich der Widerspruch
$\sphericalangle$ APB + $\sphericalangle$ BPQ + $\sphericalangle$ QPC $< 180^\circ$. Also gilt
$\sphericalangle$ APB = $\sphericalangle$ BPQ = $\sphericalangle$ QPC = 60°; daher ist D gleichschenklig mit $\sphericalangle$BAP = $\sphericalangle$PCQ (= 30°)

3. Fall: D_1 ist bei A rechtwinklig.
Dann ist auch D bei A rechtwinklig.

Damit hat sich in jedem Fall D als gleichschenklig oder rechtwinklig erwiesen.

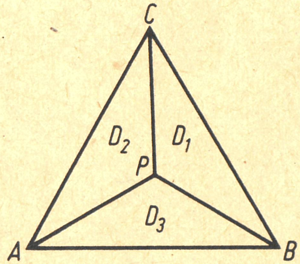

Abb. L 1243 a

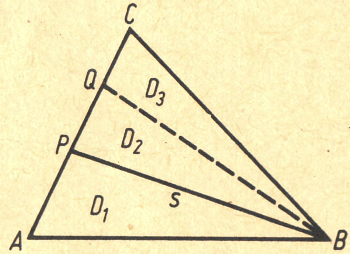

Abb. L 1243 b

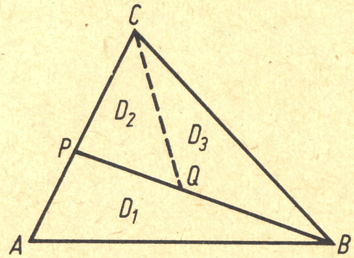

Abb. L 1243 c

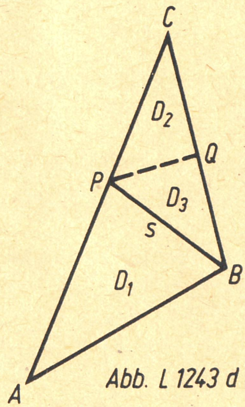

Abb. L 1243 d

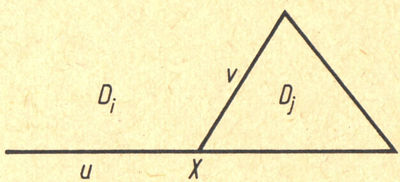

Abb. L 1243 e

korr.

+

L 11/12;II XVII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

171244) Lösung: 7 Punkte

Für je zwei Punkte X,Y der Kreisfläche bzw. des Kugelkörpers gilt $d(X,Y) \leq d$. Daher sind die Behauptungen a), b) bewiesen, sobald gezeigt ist, daß in mindestens einer der genannten Teilflächen bzw. in mindestens einem der genannten Teilkörper Punkte P,Q mit $d(P,Q) = d$ existieren.

Zu a) Es sei S ein Streckenzug mit den angegebenen Eigenschaften. Der zu M auf dem Kreis diametral gegenüberliegende Punkt M' hat einerseits die Eigenschaft $d(M,M') = d$; andererseits muß er wenigstens zu einer der beiden Teilflächen gehören. Zu ihr gehört auch M, da M zu beiden Teilflächen gehört. Damit ist für a) die Behauptung bewiesen.

Zu b) Durch ε_1 werde der gegebene Kugelkörper k in zwei Teilkörper k_1 und k_0 und durch ε_2 o.B.d.A. der Teilkörper k_0 in Teilkörper k_2 und k_3 zerlegt.

Fall 1: Der Mittelpunkt M der Kugel gehört k_1 an. Dann schneidet die zu ε_1 parallele Ebene durch M den Kugelkörper k in einer Kreisfläche mit dem Durchmesser d, die ganz zu k_1 gehört. Auf ihrem Rand gewählte diametral einander gegenüberliegende Punkte P,Q gehören also zu k_1 und haben die Eigenschaft $d(P,Q) = d$.

Fall 2: Der Mittelpunkt M gehört nicht k_1 an; o.B.d.A. gehöre in diesem Falle M zu k_2.

2.1. ε_1 und ε_2 sind parallel zueinander.
Dann schneidet die zu ε_1 und ε_2 parallele Ebene durch M den Kugelkörper k in einer Kreisfläche mit dem Durchmesser d, die ganz zu k_2 gehört, und der Beweis verläuft wie im Fall 1, nur mit k_2 statt k_1.

2.2. ε_1 und ε_2 sind nicht parallel zueinander.
Es sei g die Schnittgerade der ε_1 bzw. ε_2 enthaltenden Ebenen. Ferner sei h die Parallele zu g durch M. Dann schneidet h nicht die ε_1 enthaltende Ebene, ferner schneidet entweder h auch die ε_2 enthaltende Ebene nicht oder M liegt ganz in der ε_2 enthaltenden Ebene.
Also gehört diejenige Strecke der Länge d, die h mit dem Kugelkörper k gemeinsam hat, ganz zu k_2.
Damit ist auch für b) die Behauptung in allen Fällen bewiesen.

171245) Lösung: 6 Punkte

a) Es sei x eine reelle Lösung der Gleichung

$$f_1(x) = 2x. \qquad (1)$$

Dann gilt

$$\sqrt{x^2 + 48} = 2x \quad \text{und } x > 0,$$

also

$$x^2 + 48 = 4x^2, \qquad 3x^2 = 48, \quad x^2 = 16.$$

Wegen $x > 0$ gilt daher $x = 4$.

Wenn also die Gleichung (1) überhaupt eine reelle Lösung hat, so kann es nur die Lösung $x = 4$ sein. Andererseits gilt für $x = 4$

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 + 48} = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8 = 2\cdot 4 = 2x.$$

Daher ist $x = 4$ die einzige reelle Lösung der Gleichung (1).

b) Wir zeigen nun mit Hilfe der vollständigen Induktion, daß $x = 4$ auch Lösung aller Gleichungen

$$f_n(x) = 2x, \quad (n = 1,2,3,\ldots) \quad (2)$$

ist, was für $n = 1$ bereits unter a) bewiesen worden ist.

Angenommen, für $n = k$ sei $f_k(4) = 2\cdot 4 = 8$.
Dann gilt

$$f_{k+1}(4) = \sqrt{16 + 6\cdot 8} = \sqrt{64} = 8 = 2\cdot 4,$$

d.h., $x = 4$ ist auch Lösung der Gleichung $f_{k+1}(x) = 2x$ und daher aller Gleichungen (2).

c) Nun zeigen wir, daß keine der Gleichungen (2) eine weitere reelle Lösung hat:
Für alle reellen x gilt $f_1(x) > 0$, und aus $f_k(x) > 0$ für alle x folgt auch $f_{k+1}(x) > 0$ für alle x. Daher gilt $f_n(x) > 0$ für alle x und alle $n = 1,2,3,\ldots$.
Somit hat keine der Gleichungen (2) eine Lösung $x \leq 0$. Ferner zeigen wir, daß für jedes $n = 1,2,3,\ldots$ die für alle $x > 0$ durch $F_n(x) = \frac{f_n(x)}{x}$ definierte Funktion F_n streng monoton fallend ist.
Für F_1 trifft dies zu; denn es gilt $F_1(x) = \frac{f_1(x)}{x} = \sqrt{1 + \frac{48}{x^2}}$.
Ist nun F_k streng monoton fallend, so auch F_{k+1}; denn es gilt

$$F_{k+1}(x) = \frac{f_{k+1}(x)}{x} = \sqrt{1 + \frac{6f_k(x)}{x^2}} = \sqrt{1 + \frac{6F_k(x)}{x}} .$$

Also nimmt für jedes $n = 1,2,\ldots$ die Funktion F_n den Wert 2 nur für $x = 4$ an, d.h. jede Gleichung (2) hat auch im Bereich aller $x \geq 0$ nur $x = 4$ als Lösung.
Daher ist für jedes $n = 1,2,3,\ldots$ genau die Zahl $x = 4$ Lösung der Gleichung (2).

<u>171246 A) Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

Für die durch $f(x) = |x-a_1| + \ldots + |x-a_n|$ in $(-\infty,+\infty)$ definierte Funktion gilt

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n}(a_k - x) = -nx + \sum_{k=1}^{n} a_k & \text{für } x \leq a_1 \\ \sum_{k=1}^{i}(x - a_k) + \sum_{k=i+1}^{n}(a_k - x) = (2i-n)x - \sum_{k=1}^{i} a_k + \sum_{k=i+1}^{n} a_k & \text{für } a_i \leq x \leq a_{i+1} \\ & (i = 1,\ldots,n-1) \\ \sum_{k=1}^{n}(x - a_k) = nx - \sum_{k=1}^{n} a_k & \text{für } a_n \leq x \end{cases}$$

Daher gelten folgende Monotonieaussagen:
Aus $i \leq \frac{n}{2}$ und $a_i \leq x \leq x' \leq a_{i+1}$ folgt $f(x) \geq f(x')$,
aus $i \geq \frac{n}{2}$ und $a_i \leq x \leq x' \leq a_{i+1}$ folgt $f(x) \leq f(x')$.
Aus $x < x' \leq a_1$ folgt $f(x) > f(x')$,
aus $i < \frac{n}{2}$ und $a_i \leq x < x' \leq a_{i+1}$ folgt $f(x) > f(x')$,

aus $i > \frac{n}{2}$ und $a_i \leqq x < x' \leqq a_{i+1}$ folgt $f(x) < f(x')$,
aus $a_n \leqq x < x'$ folgt $f(x) < f(x')$.

Nun unterscheiden wir folgende Fälle:

<u>1. Fall:</u> Es sei $n = 2m$ mit positivem ganzem m.

a) Aus $x < a_{m+1}$ folgt: Für den größten Index $j \leqq m$ mit $x < a_j$ gilt entweder,
falls $j = 1$ ist, $x < a_1 \leqq a_m$, also $f(x) > f(a_1) \geqq \ldots \geqq f(a_m)$ oder
falls $j > 1$ ist, $a_{j-1} \leqq x < a_j \leqq a_m$, also $f(x) > f(a_j) \geqq \ldots \geqq f(a_m)$

b) Aus $a_m \leqq x \leqq a_{m+1}$ folgt sowohl $f(a_m) \geqq f(x) \geqq f(a_{m+1})$ als auch $f(a_m) \leqq f(x) \leqq f(a_{m+1})$, also, $f(a_m) = f(x) = f(a_{m+1})$ (was sich auch direkt aus der Formel für $f(x)$ bei $a_i \leqq x \leqq a_{i+1}$ mit $i = \frac{n}{2}$ ablesen läßt).

c) Aus $x > a_{m+1}$ folgt: Für den kleinsten Index $j \geqq m+1$ mit $x > a_j$ gilt entweder, falls $j = n$ ist, $a_{m+1} \leqq a_n < x$, also $f(a_m) = f(a_{m+1}) \leqq \ldots \leqq f(a_n) < f(x)$, oder, falls $j < n$ ist, $a_{m+1} \leqq a_j < x \leqq a_{j+1}$, also $f(a_m) = f(a_{m+1}) \leqq \ldots \leqq f(a_j) < f(x)$.

Damit ist bewiesen: Es gibt ein x derart, daß z möglichst klein ist, und zwar haben genau diejenigen x diese Eigenschaft, für die $a_m \leqq x \leqq a_{m+1}$ gilt, und der zugehörige minimale Wert von z beträgt

$$f(a_m) = -\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k.$$

<u>2. Fall:</u> Es sei $n = 2m - 1$ mit positivem ganzem m.

a) Aus $x < a_m$ folgt wie im 1. Fall unter a), daß $f(x) > f(a_m)$ gilt.

b) Aus $x > a_m$ folgt: Für den kleinsten Index $j \geqq m$ mit $x > a_j$ gilt entweder, falls $j = n$ ist, $a_m \leqq a_n < x$, also $f(a_m) \leqq \ldots \leqq f(a_n) < f(x)$, oder, falls $j < n$ ist, $a_m \leqq a_j < x \leqq a_{j+1}$, also $f(a_m) \leqq \ldots \leqq f(a_j) < f(x)$.

Damit ist bewiesen: Es gibt ein x derart, daß z möglichst klein ist, und zwar hat genau die Zahl $x = a_m$ diese Eigenschaft, und der zugehörige minimale Wert von z beträgt

$$f(a_m) = -\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k.$$

Hinweis zur Korrektur: Bei der Einschätzung von Aussagen über strenge Monotonie ist besonders zu prüfen, ob solche Fälle berücksichtigt (d.h. von der Behauptung der strengen Monotonie ausgeschlossen) wurden, in denen es sich um Intervalle $[a,b]$ mit $a = b$ handelt.

171246 B) Lösung: 8 Punkte

(a) I. Aus der gegebenen Menge der 2n Punkte lassen sich nach einer bekannten Formel genau $\binom{2n}{3} = \frac{2n\,(2n-1)\,(2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ verschiedene Mengen aus je drei Punkten auswählen, d.h. es ist

$$m_n = \frac{2n\,(2n-1)\,(2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

II. Ist $M = \{A_i, A_j, A_k\}$ "einseitig", so gibt es genau eine der Ecken in M derart, daß für jeden Halbkreisbogen h, der M enthält, gilt: Durchläuft man h von einem Endpunkt zum anderen im Drehsinn der Numerierung $A_0, A_1, \ldots$, so wird von den drei Ecken aus M die genannte Ecke als erste erreicht.

Beweis: Würde beim Durchlaufen von h die Ecke A_i und beim Durchlaufen eines anderen (M enthaltenden) Halbkreisbogens h^* eine andere Ecke A_i^* als erste erreicht, so hätte sowohl der im gegebenen Drehsinn durchlaufene Bogen von A_i nach A_i^* als auch der von A_i^* nach A_i höchstens Halbkreislänge. Da die Summe dieser Bogenlängen der Umfang von u ist, ergäbe sich: A_i und A_i^* sind Endpunkte eines Durchmessers, und h, h^* sind die beiden verschiedenen von ihnen begrenzten Halbkreisbögen. Dazu steht im Widerspruch, daß nun die dritte Ecke aus M sowohl im Innern von h als auch im Innern von h^* liegen müßte.

Nach der somit bewiesenen Aussage kann man jeder "einseitigen" Menge M eindeutig die genannte (bei der Durchlaufung zuerst erreichte) Ecke zuordnen. Ist dies etwa A_i, so haben die beiden anderen Ecken aus M Indizes j,k, die sich ergeben, wenn man zu i zwei verschiedene Zahlen aus der Menge $\{1, \ldots, n\}$ addiert und, falls eine der dabei entstehenden Zahlen $\geq 2n$ ist, von ihr 2n subtrahiert.

Umgekehrt haben nach Wahl eines beliebigen Index $i \in \{0, \ldots, 2n-1\}$ die durch dieses Verfahren jeweils entstehenden Indizes j,k stets mit dem betreffenden i zusammen die Eigenschaft, daß $\{A_i, A_j, A_k\}$ "einseitig" ist.

Somit ist die Anzahl g genau 2n mal so groß wie die Anzahl aller zweielementigen Teilmengen von $\{1,\dots,n\}$. Diese Anzahl ist $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$. Also ist $g_n = n^2(n-1)$.

III. Aus I. und II. folgt $w_n = \frac{n^2(n-1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{2n(2n-1)(2n-2)} = \frac{3n}{2(2n-1)}$.

b) Wegen $w_n = \frac{3}{2(2-\frac{1}{n})}$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, also $\lim\limits_{n\to\infty} 2(2-\frac{1}{n}) = 4$, +

ist $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \frac{3}{4}$.