XVII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

171231

Gegeben sei die Folge (a_n) durch

$$a_n = \frac{4n}{4n^2 + 121} \qquad (1)$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$

Man ermittle die obere Grenze und die untere Grenze von (a_n), sofern diese existieren.

171232

Zu jeder ganzen Zahl a ermittle man alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$x^4 + x^3 + a^2x^2 + x + 1 = 0.$$

171233

Es sei ABCD ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge s, in dem fünf kongruente Kugeln (mit den Mittelpunkten P, Q, R, S, T) so angeordnet sind, daß gilt:

(1) Die Kugel um P berührt die drei von A ausgehenden Seitenflächen ABC, ACD, ADB des Tetraeders,

(2) die Kugel um Q berührt die drei von B ausgehenden Seitenflächen,

(3) die Kugel um R berührt die drei von C ausgehenden Seitenflächen und

(4) die Kugel um S die drei von D ausgehenden Seitenflächen.

(5) Die Kugel um T berührt die vier übrigen Kugeln von außen.

Man ermittle den Radius r dieser fünf Kugeln.

XVII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

171234

Man beweise, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b, c mit $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$ die Ungleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}$ gilt.

171235

Man beweise folgenden Satz:

Sind u der Umfang, r der Radius des Inkreises und R der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC, dann gilt

$$R > \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{ur}.$$

Ist das Dreieck insbesondere rechtwinklig, dann gilt sogar

$$R \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{ur}.$$

Von den folgenden Aufgaben 1236 A und 1236 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

171236 A

Es sei n eine natürliche Zahl mit $n > 1$.

a) Man ermittle alle diejenigen in der Menge R der reellen Zahlen definierten Funktionen f, die in R stetig sind und die Eigenschaft haben, daß für jede reelle Zahl x die Gleichung

$$f(x^n) = f(x) \qquad (1)$$

gilt.

b) Man gebe eine in R definierte und unstetige Funktion f an, die die Eigenschaft (1) hat.

171236 B

Ist z eine reelle Zahl, so bezeichnet $[z]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich z ist. Beispielsweise gilt

$\left[\frac{7}{2}\right] = 3$; $[5] = 5$; $[-\pi] = -4$.

Man beweise: Für jede reelle Zahl x und jede positive ganze Zahl n gilt

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx].$$

3o o6 74-1/1ooo/77(2o4)

XVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11 und 12 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

171231) Lösung: 5 Punkte

Für alle n = 1, 2, 3, ... gilt $a_n > 0$ (1)

sowie

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4(n+1)}{4n^2 + 8n + 125} - \frac{4n}{4n^2 + 121}$$
$$= \frac{4(4n^3 + 4n^2 + 121n + 121 - 4n^3 - 8n^2 - 125n)}{(4n^2 + 8n + 125)(4n^2 + 121)}$$
$$= \frac{-16(n^2 + n - 30\frac{1}{4})}{(4n^2 + 8n + 125)(4n^2 + 121)} .$$

Für $1 \leqq n \leqq 5$ ist wegen $n(n+1) \leqq 30$ somit $a_{n+1} - a_n > 0$, für $n \geqq 6$ wegen $n(n+1) \geqq 42$ dagegen $a_{n+1} - a_n < 0$. Also gilt

$$a_1 < a_2 < \dots < a_6; \; a_6 > a_7 > \dots .$$

Folglich existiert die obere Grenze von (a_n) und ist gleich $a_6 = \frac{24}{265}$.

Wegen $a_n = \frac{4}{n} \cdot \frac{1}{4 + \frac{121}{n^2}}$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{4}{n} = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{121}{n^2} = 0$, also

$\lim\limits_{n \to \infty} (4 + \frac{121}{n^2}) = 4 \neq 0$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) ergibt sich, daß die untere Grenze von (a_n) existiert und gleich 0 ist.

171232) Lösung: 7 Punkte

Wenn für eine ganze Zahl a die Gleichung

$$x^4 + x^3 + a^2x^2 + x + 1 = 0 \qquad (1)$$

eine reelle Lösung x hat, so gilt für diese $x \neq 0$ und daher wegen (1)

$$(x^2 + \frac{1}{x^2}) + (x + \frac{1}{x}) + a^2 = 0. \qquad (2)$$

Für die reelle Zahl $z = x + \frac{1}{x}$ gilt $z^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, (3)
also wegen (2)

$$z^2 + z + a^2 - 2 = 0. \qquad (4)$$

Diese quadratische Gleichung hat nur dann reelle Lösungen, und zwar genau

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - a^2}\ , \quad z_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - a^2}, \qquad (5)$$

wenn $a^2 \leqq \frac{9}{4}$, d. h. a gleich 0, 1 oder -1 ist.

1. Für $a = 0$ erhält man aus (5) $z_1 = 1$, $z_2 = -2$, also wegen (3)

$$x + \frac{1}{x} = 1, \text{ d. h. } x^2 - x + 1 = 0, \qquad (6)$$

oder

$$x + \frac{1}{x} = -2, \text{ d. h. } x^2 + 2x + 1 = 0. \qquad (7)$$

Die quadratische Gleichung (6) hat keine reelle Lösung, während die quadratische Gleichung (7) genau eine reelle Lösung, nämlich $x = -1$, hat.

2. Für $a = 1$ und $a = -1$ erhält man aus (5)

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \text{ also } -2 < z_i < 2 \qquad (i = 1, 2).$$

In diesem Falle haben daher die Gleichungen
$x + \frac{1}{x} = z_1$ und $x + \frac{1}{x} = z_2$ keine reellen Lösungen.

Die Gleichung (1) kann also nur im Falle $a = 0$ eine reelle Lösung haben, und zwar nur eine, nämlich $x = -1$.
In der Tat gilt $(-1)^4 + (-1)^3 + 0^2 \cdot (-1)^2 + (-1) + 1 = 0$, also ist $x = -1$ für $a = 0$ Lösung von (1).

171233) Lösung: 8 Punkte

Die Berührungspunkte der Seitenflächen ABC, ACD, ADB mit der Kugel um P seien U, V, W. Der Schwerpunkt der Seitenfläche BCD sei Y. Bei den Drehungen des Tetraeders um die Gerade AY, bei denen B, C, D zyklisch vertauscht werden, werden auch die genannten Seitenflächen entsprechend zyklisch vertauscht. Also geht dabei die Kugel um P in sich über, und U, V, W werden ebenfalls zyklisch vertauscht. Folglich muß die durch U, V, W bestimmte Ebene senkrecht zur Drehachse AY sein. AY ist im regelmäßigen Tetraeder die Tetraederhöhe von A auf BCD, damit steht AY auch auf BCD senkrecht.

Also sind BCD und UVW zueinander parallele Flächen.
Die durch U, V, W bestimmte Ebene schneide die Tetraederkanten AB, AC, AD in B', C', D'. Dann ist auch AB'C'D' ein regelmäßiges Tetraeder. Nach dem Strahlensatz schneidet AY seine Seitenfläche B'C'D' in derem Schwerpunkt M. Bezeichnet man die Kantenlänge von AB'C'D' mit s', so ist

$$\overline{AU} = \overline{D'U} = \frac{s'}{2}\sqrt{3},\quad \overline{UM} = \frac{1}{3}\,\overline{UD'} = \frac{s'}{6}\sqrt{3}; \qquad (*)$$

ferner gilt wegen $\sphericalangle\, AMU = 90^{\circ}$

$$\overline{AM} = s'\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{12}} = \frac{s'}{3}\sqrt{6}.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke APU und AUM und aus (*) erhält man

$$\overline{AP} = \overline{PU}\cdot\frac{\overline{AU}}{\overline{UM}} = 3r.$$

Bei den obengenannten Drehungen werden die Kugeln um Q, R, S zyklisch vertauscht, also geht die Kugel um T in sich über. Folglich muß ihr Mittelpunkt T auf der Drehachse AY liegen. Damit gilt $\overline{AT} = 5r$. Der Fußpunkt X des Lotes von T auf die Ebene durch A, B, C liegt auf der Geraden durch A und U, und es gilt

$$\overline{TX} = \overline{PU}\cdot\frac{\overline{AT}}{\overline{AP}} = \frac{5r}{3}.$$

Da der Mittelpunkt T auch bei analogen Drehungen, deren Drehachse z. B. durch B und den Schwerpunkt der Seitenfläche ACB verläuft und die A, C, D zyklisch vertauschen, auf der Drehachse liegt, ist T als Schnittpunkt zweier Schwerelinien des Tetraeders der Tetraederschwerpunkt. Bei einer derartigen Drehung um B, die A, C, D zyklisch vertauscht, geht X in Y über, also ist $\overline{TX} = \overline{TY}$.
Ebenso wie bei der Berechnung von $\overline{AM}$ aus s' ergibt sich

$$\frac{s}{3}\cdot\sqrt{6} = \overline{AY} = \overline{AT} + \overline{TX} = r\left(5 + \frac{5}{3}\right) = \frac{20}{3}r,$$

also $\quad r = \frac{s}{20}\sqrt{6}.$

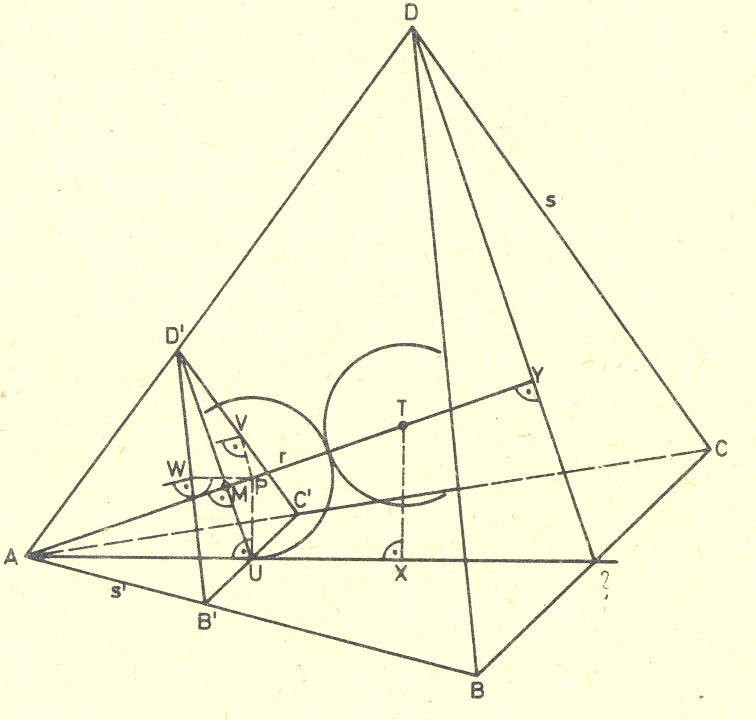

Abb. L 1233

XVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

171234) Lösung: 5 Punkte

Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

$(a + b - c)^2 \geqq 0$, also $a^2 + b^2 + c^2 + 2\,(ab - ac - bc) \geqq 0$,

$bc + ac - ab \leqq \frac{1}{2}\,(a^2 + b^2 + c^2)$.

Für alle a, b, c mit $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$ gilt daher

$bc + ac - ab \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} < 1$.

Sind a, b, c außerdem positiv, so ergibt sich hieraus

$\frac{bc + ac - ab}{abc} < \frac{1}{abc}$, also $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}$, w.z.b.w.

171235) Lösung: 8 Punkte

Das Dreieck ABC ist auf Grund des Satzes des Thales und dessen Umkehrung genau dann rechtwinklig, wenn der Umkreismittelpunkt M auf einer Seite des Dreiecks liegt.

a) Ist das Dreieck nicht rechtwinklig, so liegt M entweder innerhalb oder außerhalb des Dreiecks.

Fall 1: M liege im Innern des Dreiecks ABC.
Dann gilt für die Flächeninhalte F, F_1, F_2, F_3 der Dreiecke ABC, AMB, BMC, CMA die Beziehung

$$F = F_1 + F_2 + F_3. \qquad (1)$$

Sind α, β, γ die Größen der Winkel $\sphericalangle$AMB, $\sphericalangle$BMC, $\sphericalangle$CMA, so gilt

$F_1 = \frac{1}{2} R^2 \sin\alpha$, $F_2 = \frac{1}{2} R^2 \sin\beta$, $F_3 = \frac{1}{2} R^2 \sin\gamma$; ferner gilt

$F = \frac{1}{2}\, u\, r$.

Aus (1) ergibt sich dann unter Berücksichtigung dieser Beziehungen

$$u\, r = R^2\,(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma). \qquad (2)$$

Für jede Winkelgröße x gilt bekanntlich $\sin x \leqq 1$ und dabei, wenn x zwischen 0° und 180° liegt, nur im Falle $x = 90^\circ$ das Gleichheitszeichen. Da auf Grund des Zentri-Peripheriewinkel-Satzes $\alpha = 2 \cdot \sphericalangle ACB$, $\beta = 2 \cdot \sphericalangle BAC$, $\gamma = 2 \cdot \sphericalangle CBA$ ist, also $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$ gilt, kann nicht $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ sein. Daher gilt

30 06 74-1/1000/77(204)

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma < 3. \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) ergibt sich die Beziehung $ur < 3R^2$ oder $R > \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{ur}$.

<u>Fall 2:</u> M liege außerhalb des Dreiecks ABC. Dann gilt für die Flächeninhalte F, F_1, F_2, F_3 der Dreiecke ABC, AMB, CMB, AMC bei geeigneter Reihenfolge der Bezeichnungen A, B, C die Beziehung

$$F = F_1 + F_2 - F_3. \qquad (1')$$

Sind α, β die Größen der Winkel $\sphericalangle$ AMB, $\sphericalangle$ BMC, so gilt
$F_1 = \frac{1}{2} R^2 \sin\alpha$, $F_2 = \frac{1}{2} R^2 \sin\beta$, $F_3 = \frac{1}{2} R^2 \sin(\alpha+\beta)$.
Aus (1') ergibt sich dann unter Berücksichtigung dieser Beziehungen und $F = \frac{1}{2}\,u\,r$:

$$u\,r = R^2 (\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha+\beta)). \qquad (2')$$

Nun gilt $\sin\alpha \leqq 1$, $\sin\beta \leqq 1$, $\sin(\alpha+\beta) \geqq -1$, und dabei, da α und β zwischen 0° und 180° liegen, die Gleichheitszeichen nur in den Fällen $\alpha = 90^\circ$ bzw. $\beta = 90^\circ$ bzw. $\alpha + \beta = 270^\circ$. Da diese drei Beziehungen nicht gleichzeitig erfüllt sein können, folgt

$$\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha+\beta) < 3. \qquad (3')$$

Aus (2') und (3') ergibt sich die Beziehung $u\,r < 3\,R^2$ oder $R > \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{u\,r}$.

b) M liege o.B.d.A. auf der Seite AC des Dreiecks, d. h. das Dreieck ABC habe bei B einen rechten Winkel. Dann gilt für die Flächeninhalte F, F_1, F_2 der Dreiecke ABC, AMB, BMC die Beziehung

$$F = F_1 + F_2. \qquad (1'')$$

Es gilt einerseits $F = \frac{1}{2}\,u\,r$ und andererseits $F_1 = \frac{1}{2} R^2 \sin\alpha$, $F_2 = \frac{1}{2} R^2 \sin\beta$, wobei α, β die Größen der Winkel $\sphericalangle$ AMB, $\sphericalangle$ BMC sind. Aus (1") ergibt sich daher unter Berücksichtigung dieser Beziehungen und wegen $\sin\alpha \leqq 1$, $\sin\beta \leqq 1$ die Beziehung $ur \leqq 2\,R^2$ oder $R \geqq \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{ur}$. (Bei einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck gilt dabei das Gleichheitszeichen.)

171236A) Lösung: 7 Punkte

a) Es sei f eine in R stetige Funktion mit der Eigenschaft (1). Für jede reelle Zahl x und jede natürliche Zahl k gilt dann

$f(x^{n^k}) = f(x)$; denn für k = 0 ist dies richtig, und gilt es für ein k, so folgt

$f(x^{n^{k+1}}) = f((x^{n^k})^n) = f(x^{n^k}) = f(x)$.

Es sei $f(0) = c$ gesetzt.

I.) Für jedes x mit $-1 < x < 1$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x^{n^k} = 0$. Da f an der Stelle 0 stetig ist, folgt hieraus $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^{n^k}) = f(0) = c$. Da aber alle $f(x^{n^k}) = f(x)$ sind, besagt dies $f(x) = c$.

II.) Da f an der Stelle 1 stetig ist, strebt f(x) gegen f(1), wenn x von unten her gegen 1 strebt. Nach (I) folgt daher $f(1) = c$.

III.) Entsprechend erhält man $f(-1) = c$, indem man x von oben her gegen -1 streben läßt.

IV.) Für jedes $x > 1$ werde $a_k = \sqrt[n^k]{x}$ gesetzt. Dann gilt $f(a_k) = f(a_k^{n^k}) = f(x)$ für alle k. Andererseits ist $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 1$, also, da f an der Stelle 1 stetig ist, $\lim\limits_{k\to\infty} f(a_k) = f(1) = c$. Somit ist $f(x) = c$.

V.) Ist n gerade, so gilt für jedes $x < -1$ zunächst $x^n > 1$ und daher nach (IV) $f(x) = f(x^n) = c$.

VI.) Ist n ungerade, so werde für jedes $x < -1$ zunächst $a_k = -\sqrt[n^k]{|x|}$ gesetzt. Dann gilt $a_k^{n^k} = -|x| = x$, also $f(a_k) = f(x)$ für alle k. Andererseits ist $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = -1$, und es folgt $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f(a_k) = f(-1) = c$.

Nach I.) bis VI.) können nur konstante Funktionen die geforderten Eigenschaften haben. In der Tat ist jede konstante Funktion stetig und erfüllt (1). Also sind die in a) gesuchten Funktionen genau alle konstanten Funktionen.

b) Eine in R definierte und unstetige Funktion f, die die Eigenschaft (1) hat, ist z. B. durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x = 0 \\ 0 \text{ für } x \neq 0 \end{cases}$$

definiert; denn für $x = 0$ ist $x^n = x$, also $f(x^n) = f(x)$, und für jedes $x \neq 0$ ist auch $x^n \neq 0$, also $f(x^n) = 0 = f(x)$, und es gilt $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0 \neq f(0)$, also ist f an der Stelle 0 unstetig.

<u>171236B) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Es sei $[nx] = G$ und $[x] = g$. Dann ist $G \leq nx < G + 1$ und $ng \leq nx < ng + n$, woraus $ng < G + 1$, also wegen der Ganzzahligkeit von ng und G weiter $ng \leq G < ng + n$ folgt. Setzen wir $ng + n - G = d$, so ergibt sich $0 < d \leq n$. Unter den Summanden

$$\left[\frac{nx + i}{n}\right]$$

$(i = 0, \ldots, n - 1)$ sind

(1) genau d Summanden mit $0 \leq i < d$ und

(2) genau $n - d$ Summanden mit $d \leq i < n$.

Für die Summanden (1) ist $g \leq \frac{nx + i}{n} < \frac{G + 1 + i}{n} \leq \frac{G + d}{n} = g + 1$,

also $\left[\frac{nx + i}{n}\right] = g$.

Für die Summanden (2) ist $g + 1 = \frac{G + d}{n} \leq \frac{G + i}{n} \leq \frac{nx + i}{n} < g + 2$,

also $\left[\frac{nx + i}{n}\right] = g + 1$.

Daher gilt:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n - 1}{n}\right] = dg + (n-d)\,(g+1)$$
$$= ng + n - d = G = [nx] \;.$$