XVII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

171221

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a_1, d, b_1, q, für die folgende Aussage gilt: Wenn

(1) a_1 das Anfangsglied und d die Differenz einer arithmetischen Folge (a_n) ist und wenn

(2) b_1 $(\neq 0)$ das Anfangsglied und q der Quotient einer geometrischen Folge (b_n) ist, so haben diese Folgen die Eigenschaften

(3) $a_1 = -3b_1$,

(4) $a_2 = 2b_2$.

(5) $a_3 = b_3$,

(6) d ist eine ganze Zahl.

171222

Über eine natürliche Zahl x werden von vier Schülern A, B, C, D je drei Aussagen gemacht. Dabei macht der Schüler A genau zwei wahre Aussagen, während die Schüler B, C, D mindestens eine und höchstens zwei wahre Aussagen treffen. Man ermittle alle natürlichen Zahlen x, die diesen Bedingungen genügen:

(A1) x ist dreistellig.

(A2) Es gilt: $500 < x < 600$.

(A3) Jede der Ziffern 1, 3, 5, 7, 9 tritt genau einmal entweder in der dekadischen Darstellung von x oder in der dekadischen Darstellung der Quersumme von x auf; andere Ziffern kommen in beiden Darstellungen nicht vor.

(B1) In der dekadischen Darstellung von x ist die Anzahl der Zehner das arithmetische Mittel aus der Anzahl der Hunderter und der der Einer.

(B2) x ist das Produkt dreier voneinander verschiedener Primzahlen.

(B3) x ist durch 5 teilbar.

(C1) x ist eine Quadratzahl.

(C2) Streicht man in der dekadischen Darstellung von x die Hunderterziffer und fügt sie als (neue) Endziffer wieder an, so erhält man die dekadische Darstellung einer Primzahl.

(C3) Die dekadische Darstellung von x enthält mindestens drei gleiche Ziffern.

(D1) x ist das Produkt zweier zweistelliger Zahlen.

(D2) x ist Primzahl.

(D3) x ist ungerade.

<u>171223</u>

Es sind alle ganzen Zahlen x zu ermitteln, für die

$$f(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2}$$

ganzzahlig ist.

<u>171224</u>

Gegeben sei in einer Ebene ε ein gleichseitiges Dreieck ABC. Man ermittle die Menge aller derjenigen Punkte X in ε , für die $\overline{AX} + \overline{BX} = \overline{CX}$ gilt.

XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

171221) Lösung: 7 Punkte

Angenommen, für reelle Zahlen a_1, d, b_1, q folge aus (1), (2), daß (3) bis (6) gelten. Für die Zahlen

$a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_1 + 2d$; $b_2 = q \cdot b_1$; $b_3 = q^2 \cdot b_1$ ergibt sich dann

$$a_1 + 3b_1 = 0, \quad (7)$$
$$a_1 + d - 2b_1q = 0, \quad (8)$$
$$a_1 + 2d - b_1q^2 = 0. \quad (9)$$

Aus (8) und (9) folgt:

$a_1 - 4b_1q + b_1q^2 = 0$; hieraus und aus (7) folgt:

$b_1 (3+4q - q^2) = 0$, wegen $b_1 \neq 0$ also

$q^2 - 4q - 3 = 0$, also

$$q = 2 + \sqrt{7} \text{ oder } q = 2 - \sqrt{7}. \quad (10)$$

Aus (7) und (8) erhält man $d = b_1 (3+2q)$ und daraus und aus (10)

$$d = b_1 \cdot (7+2\cdot\sqrt{7}) \text{ oder } d = b_1 \cdot (7-2\cdot\sqrt{7}).$$

Hiernach folgt aus (6), daß für die ganze Zahl $d = k$

$$b_1 = \frac{k}{7+2\cdot\sqrt{7}} = \frac{k}{21}(7-2\cdot\sqrt{7}) \text{ oder } b_1 = \frac{k}{7-2\cdot\sqrt{7}} = \frac{k}{21}(7+2\cdot\sqrt{7})$$

gilt.

Also können nur die folgenden Werte den Bedingungen der Aufgabe genügen:

$a_1 = -\frac{k}{7}(7-2\cdot\sqrt{7})$	oder	$a_1 = -\frac{k}{7}(7+2\cdot\sqrt{7})$,
$d = k$	bzw.	$d = k$
$b_1 = \frac{k}{21}(7-2\cdot\sqrt{7})$	bzw.	$b_1 = \frac{k}{21}(7+2\cdot\sqrt{7})$,
$q = 2 + \sqrt{7}$	bzw.	$q = 2 - \sqrt{7}$

(k beliebig ganzzahlig).

In der Tat ergibt sich für diese Werte und für die zugehörigen

$a_2 = \frac{2k}{7}\sqrt{7}$	bzw.	$a_2 = -\frac{2k}{7}\sqrt{7}$,
$a_3 = \frac{k}{7}(7+2\cdot\sqrt{7})$	bzw.	$a_3 = \frac{k}{7}(7-2\cdot\sqrt{7})$,

$b_2 = \frac{k}{7}\sqrt{7}$ bzw. $b_2 = -\frac{k}{7}\sqrt{7}$,

$b_3 = \frac{k}{7}(7+2\cdot\sqrt{7})$ bzw. $b_3 = \frac{k}{7}(7-2\cdot\sqrt{7})$,

daß die Bedingungen (3) bis (6) erfüllt sind.

171222) Lösung: 11 Punkte

Hinsichtlich der Aussagen von A sind nur folgende drei Fälle möglich:

Fall 1: (A2) und (A3) wahr; (A1) falsch.
Da jede natürliche Zahl zwischen 500 und 600 eine dreistellige Zahl ist, folgt (A1) aus (A2). Daher kann (A1) nicht falsch sein, wenn (A2) als wahr angenommen wird. Der Fall 1 ist also nicht möglich.

Fall 2: (A1) und (A2) wahr; (A3) falsch.
Angenommen, dieser Fall wäre möglich. Da dann (A2) wahr wäre, so wäre (C2) falsch, da die auf Grund von (C2) zu bildende Zahl wegen $500 < x < 600$ nur zwei- oder dreistellig sein könnte und jede mehrstellige Zahl, deren dekadische Darstellung als Endziffer 5 hat, keine Primzahl ist. Ferner könnte man schließen, daß (C1) falsch sein müßte; denn sonst wäre x entweder 529 oder 576. Für beide Zahlen wären aber alle Aussagen von B falsch. Also müßte (C3) die einzige wahre Aussage von C sein. Wegen (A2) müßte dann $x = 555 = 3 \cdot 5 \cdot 37$ sein.
Auf die Zahl 555 treffen jedoch alle Aussagen von B zu, so daß dieser Fall ebenfalls entfällt.
Also verbleibt als einzig möglicher Fall nur

Fall 3: (A1) und (A3) wahr; (A2) falsch.
Da (A1) und (A3) wahr sind, ist x dreistellig und folglich die Quersumme von x zweistellig. Die dekadische Darstellung von x kann sich nicht aus den Ziffern 1, 3, 5 bilden lassen, da in diesem Fall die Quersumme von x kleiner als 10 und daher keine zweistellige Zahl wäre.
Die dekadische Darstellung von x kann sich auch nicht aus den Ziffern 1, 3, 7 bzw. 1, 3, 9 bzw. 1, 5, 7 bzw. 1, 5, 9 bzw. 1, 7, 9 bilden lassen, da in jedem dieser Fälle mindestens die Ziffer 1 in den dekadischen Darstellungen von x und der Quersumme von x mehrfach auftreten würde.
Sie kann sich aber auch nicht aus den Ziffern 3, 5, 7 bzw. 3, 7, 9 bilden lassen, da in beiden Fällen in den dekadischen Darstellungen

von x und der Quersumme von x die Ziffern 5 bzw. 9 mehrfach auftreten würden.
Sie kann sich ferner nicht aus den Ziffern 5, 7, 9 bilden lassen, da in diesem Fall die dekadische Darstellung der Quersumme von x die Ziffer 2 enthält.
Sie kann sich daher höchstens aus den Ziffern 3, 5, 9 bilden lassen. In diesem Fall ist die Quersumme 17.
Folglich sind höchstens die Zahlen $x_1 = 359$, $x_2 = 395$, $x_3 = 539$, $x_4 = 593$, $x_5 = 935$, $x_6 = 953$ möglich. Da (A2) falsch ist, entfallen x_3, x_4.
Ist x eine der Zahlen x_1, x_2, x_5, x_6, so sind (C1), (C3) falsch und demzufolge (C2) wahr. Damit entfällt x_6, da $539 = 7^2 \cdot 11$ keine Primzahl ist.
Ist x eine der Zahlen x_1, x_2, x_5, so ist (B1) falsch.
Wenn $x = x_1$ wäre, so würden (B2), (B3) ebenfalls falsch sein, da 359 eine Primzahl ist.
Somit verbleiben nur noch die Möglichkeiten $x = x_2$ und $x = x_5$.
Diese beiden Zahlen genügen allen Bedingungen der Aufgabenstellung.
Ist nämlich $x = x_2$, so ist (B3) wahr, da $395 = 5 \cdot 79$ ist; (B1), (B2) sind falsch. Ferner sind (D1), (D2) falsch und (D3) wahr.
Ist $x = x_5$, so sind (B2), (B3) wahr, da $935 = 5 \cdot 11 \cdot 17$ ist, und (B1) falsch. Ferner sind (D1), (D3) wahr und (D2) falsch, so daß insgesamt gilt:
Die Zahlen 395 und 935 genügen als einzige den Bedingungen der Aufgabe.
Bei 395 sind (A1), (A3), (B3), (C2), (D3) und nur diese wahr.
Bei 935 sind (A1), (A3), (B2), (B3), (C2), (D1), (D3) und nur diese wahr.

<u>171223) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

Die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2}$

ist für alle ganzzahligen x definiert, da $x^2 - 2 \neq 0$ für alle ganzen Zahlen x gilt.
Ferner gilt

$$f(x) = 3 + \frac{x + 4}{x^2 - 2}.$$

Daher sind $f(0) = 1$, $f(1) = -2$, $f(2) = 6$, $f(3) = 4$, $f(-1) = 0$, $f(-2) = 4$, $f(-4) = 3$ ganzzahlig, während $f(-3) = 3 + \frac{1}{7}$ nicht ganzzahlig ist.

Ferner gilt für $x \geqq 4$

$$x^2 - 2 = x + 4 + x(x-1) - 6 \geqq x + 4 + 12 - 6,$$

also $x^2 - 2 > x + 4 > 0$;

also ist f(x) nicht ganzzahlig.

Für $x \leqq -5$ gilt $x^2 - 2 = |x| - 4 + |x| \cdot (|x| - 1) + 2$,

also $x^2 - 2 > |x + 4| > 0$;

also ist auch in diesem Falle f(x) nicht ganzzahlig.

Daher haben genau die Zahlen x = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -4 die geforderte Eigenschaft.

171224) Lösung: 12 Punkte

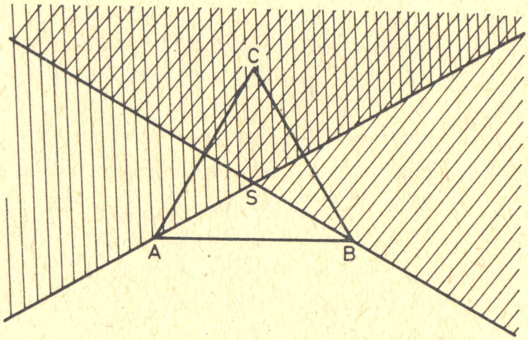

Abb. L 1224a

Der Schwerpunkt von $\triangle$ABC sei S. Liegt ein Punkt X auf derselben Seite der Geraden durch A und S wie C, so ist $\overline{BX} > \overline{CX}$ (da diese Gerade die Mittelsenkrechte von BC ist), also erst recht $\overline{AX} + \overline{BX} > \overline{CX}$. Liegt X auf derselben Seite der Geraden durch B und S wie C, so gilt entsprechend $\overline{AX} > \overline{CX}$, also $\overline{AX} + \overline{BX} > \overline{CX}$. Gehört ein Punkt X der Fläche des Dreiecks ABC an, ist aber von A und B verschieden, so gilt

$\overline{AX} + \overline{BX} \geqq \overline{AB}$ (Dreiecksungleichung)

$> \overline{CX}$ (da alle Punkte der Dreiecksfläche außer A, B im Innern des Kreises um C durch A und B liegen).

Für X = A und für X = B gilt die Gleichung $\overline{AX} + \overline{BX} = \overline{CX}$.

Die nun noch verbleibenden Punkte X liegen sämtlich in derjenigen Halbebene H, die von der Geraden durch A und B begrenzt wird und C nicht enthält. Außerdem kann durch eventuelle Vertauschung der Bezeichnungen A und B erreicht werden, daß X nicht auf der Verlängerung von CA liegt, so daß die Punkte A, C, X ein (nicht entartetes) Dreieck bilden. Es sei $\triangle$ AXY dasjenige gleichseitige Dreieck, für das Y und B auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und X liegen. Dann gilt

$$\overline{AY} = \overline{AX},\ \overline{AB} = \overline{AC}, \qquad (1)$$

und die Summe der Innenwinkel bei A in den Dreiecken AXY, ABX ist gleich der Summe der Innenwinkel bei A in den Dreiecken ABC, ABX. (Abb. L 1224 b und 1224c)

Nach den Angaben über X ist diese Summe entweder kleiner oder größer als 180°; in beiden Fällen folgt, daß die Dreiecke ABY und ACX bei A gleichgroße Innenwinkel haben. Hieraus und aus (1) ergibt sich $\triangle ABY \cong \triangle ACX$, also $\overline{BY} = \overline{CX}$.

Also gilt genau dann $\overline{AX} + \overline{BX} = \overline{CX}$, wenn $\overline{XY} + \overline{BX} = \overline{BY}$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn X auf der Strecke BY liegt, d. h. die Summe der Innenwinkel bei X in den Dreiecken AXY und AXB genau 180° beträgt. Hierfür ist $\overline{\sphericalangle\ AXB} = 120^\circ$ notwendig und hinreichend, und dies ist (für die im vorliegenden Fall betrachteten X) gleichwertig damit, daß X auf dem in H verlaufenden Kreisbogen liegt, der zu einem Zentriwinkel der Größe 240° gehört.

Wegen $\overline{\sphericalangle\ ASC} + \overline{\sphericalangle\ CSB} = 240^\circ$ ist S der zugehörige Kreismittelpunkt. Die gesuchte Menge ist also derjenige Bogen AB des Umkreises des Dreiecks ABC, der C nicht enthält.

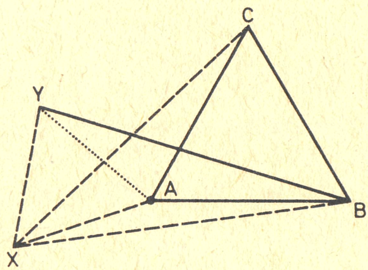

Abb. L 1224c

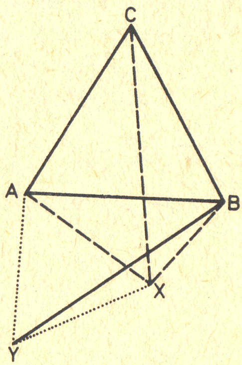

Abb. L 1224b

2. Lösungsweg:

Die Bedingung $\overline{AX} + \overline{BX} = \overline{CX}$ ist äquivalent damit, daß ein $a \quad 0$ mit

(1) $\overline{AX} + \overline{BX} = 2a$

(2) $CX = 2a$

existiert. Wird die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks ABC mit 2e bezeichnet (Abb. L 1224d), so folgt aus (1): Es muß $2a \geqq 2e$ sein, damit überhaupt Punkte X existieren, die (1) erfüllen (Dreiecksungleichung). Ist nun $a = e$, dann sind es genau

(1') die Punkte der Strecke AB (einschließlich Endpunkte), die (1) erfüllen. Bei $a > e$ sind die (1) befriedigenden Punkte genau die Punkte der Ellipse

(1") $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{mit} \qquad b^2 = a^2 - e^2$

(d. i. die Ellipse mit A und B als Brennpunkten und der halben Hauptachsenlänge a).

Wegen $2a \geqq 2e > 0$ erfüllen die (2) befriedigenden Punkte genau die Punkte des Kreises

(2') $x^2 + (y - e\cdot\sqrt{3}) = 4a^2$.

Im Falle $a = e$ haben (1') und (2') genau die Punkte A und B gemeinsam. Es sei nun $a > e$. Dann ermitteln sich die eventuell vorhandenen (reellen) gemeinsamen Punkte von (1") und (2') so:

(1") $\rightarrow 0 = (a^2-e^2)x^2 + a^2y^2 - a^2(a^2-e^2)$

(2') $\rightarrow 0 = (a^2-e^2)x^2 + (a^2-e^2)y^2 - 2e\cdot\sqrt{3}(a^2-e^2)y + (3e^2-4a^2)\cdot$

$\cdot(a^2-e^2)$, woraus durch Subtraktion folgt:

$0 = e^2y^2 + 2e\cdot\sqrt{3}(a^2-e^2)y + 3(a^2-e^2)2$

$= (ey + \sqrt{3}(a^2-e^2))^2$,

also

$y = -\sqrt{3}\cdot\frac{a^2-e^2}{e}$ für jedes $a > e > 0$.

Die in Frage kommenden x-Werte ermittelt man aus (1") zunächst zu

$x^2 = a^2 - \frac{a^2}{a^2-e^2}\cdot y^2 = a^2 - 3\frac{a^2}{2}(a^2-e^2)$

$= 3\frac{a^2}{e^2}(\frac{4}{3}e^2 - a^2)$,

d. h., höchstens für die Werte von a, die die Bedingung(en)

$0 < e \leqq a \leqq \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}e$

befriedigen, ergeben sich gemeinsame Punkte (x,y) und (-x,y) mit

$$\begin{cases} x^2 = 4a^2 - 3\frac{a^4}{e^2} & (3) \\ y = -\sqrt{3} \cdot \frac{a^2 - e^2}{e} & (4) \end{cases}$$

als (Parameter-)Darstellung. - Durch Einsetzen bestätigt man, daß diese Punkte tatsächlich (1') bzw. (1") und (2') erfüllen. (Der Parameter a durchläuft das Intervall e, $\frac{2}{3}$ 3 e , da (3), (4) auch für a = e verwendbar sind und genau die Punkte A und B ergeben.)

Aus (4) erhält man

$$a^2 = e^2 - \frac{ey}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad a^4 = e^2 \left(e^2 - \frac{2e}{\sqrt{3}} \cdot y + \frac{1}{3} y^2\right),$$

damit aus (3):

$$x^2 = 4e^2 - \frac{4}{\sqrt{3}} ey - 3e^2 + \frac{6}{\sqrt{3}} ey - y^2 \quad \text{oder}$$

(5) $x^2 + (y - \frac{1}{3} \quad 3e)^2 = \frac{4}{3}e^2 = (\frac{2}{3} \quad 3e)^2.$

Da mit $a \in \left[e, \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}e\right]$ gemäß (4) gilt: $y \in \left[-\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}e, \quad 0\right]$ und (5) die Gleichung des Umkreises des gegebenen Dreiecks ABC ist, besteht die Menge der erhaltenen Punkte aus dem von A bis B reichenden kleineren Bogenstück dieses Kreises (einschließlich der Endpunkte).

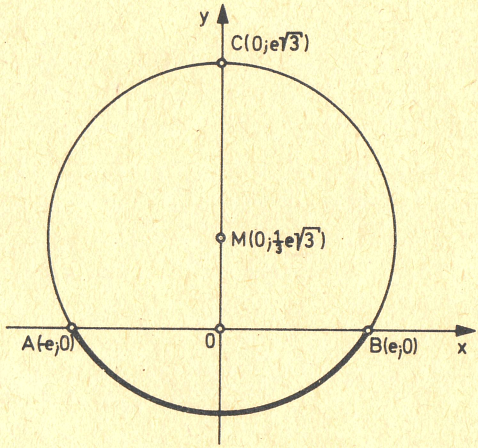

Abb. L 1224 d