korr.

nicht

A 10;I XVII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

171041

In einer Ebene ε sind eine Gerade g und zwei Kreise k_1 und k_2 gegeben.
Konstruieren Sie ein Quadrat ABCD, dessen Eckpunkte A und C auf g liegen, dessen Eckpunkt B auf k_1 und dessen Eckpunkt D auf k_2 liegt! Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion!
Stellen Sie fest, für welche Lagemöglichkeiten der gegebenen g, k_1, k_2 ein solches Quadrat existiert und für welche von diesen Lagemöglichkeiten es dann sogar eindeutig bestimmt ist!

171042

Man ermittle alle rationalen Zahlen x, für die die Zahl
$$z = x^2 + x + 6$$
das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

Von den nachstehenden Aufgaben 1043 A und 1043 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

171043 A

Sind $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ natürliche Zahlen mit $0 \leq a_i \leq 3$ $(i = 0,1,\ldots,n)$ und gilt
$z = a_n \cdot 4^n + a_{n-1} \cdot 4^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 4 + a_0$, so sagt man, z sei im 4-adischen System durch die Ziffern $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ dargestellt, und schreibt kurz

A 10;I

$z = [a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_o]_4$. Ist dabei $a_n \neq 0$, so heißt die (auf genau eine Weise derart darstellbare) Zahl z (im 4-adischen System) (n+1)-stellig.

Wir bilden nun jeweils zu einer natürlichen Zahl $z \neq 0$, nachdem sie in dieser Weise dargestellt ist, die Zahl

$$z' = a_n^2 + a_{n-1}^2 + \ldots + a_1^2 + a_o^2 .$$

Dieses Verfahren kann dann wiederholt werden; aus der Zahl z' erhält man, nachdem sie im 4-adischen System dargestellt wurde, in der angegebenen Weise die Zahl z'', aus dieser ebenso z''' usw.

(Als Beispiel sei das Verfahren an der Zahl z = 54 erläutert:

Es ist $\quad z = 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4 + 2 = [312]_4$,

d.h. die Ziffern dieser Zahl sind 3, 1, 2. Also ist

$$z' = 3^2 + 1^2 + 2^2 = 14 = 3 \cdot 4 + 2 = [32]_4,$$
$$z'' = 3^2 + 2^2 = 13 = 3 \cdot 4 + 1 = [31]_4$$

usw.

Bezeichnet man jeweils die Anwendung des Verfahrens durch einen Pfeil und läßt bei Darstellungen im 4-adischen System die Klammern [ ] und die Angabe der Basis 4 fort, so kann man abgekürzt schreiben:

$$312 \rightarrow 32 \rightarrow 31 \text{ usw.})$$

a) Beweisen Sie, daß für jede natürliche, im 4-adischen System dreistellige Zahl z die Zahl z' kleiner als z ist!

b) Beweisen Sie, daß man aus jeder natürlichen Zahl $z \neq 0$ bei genügend häufiger Wiederholung des oben angegebenen Verfahrens die Zahl 1 erhält!

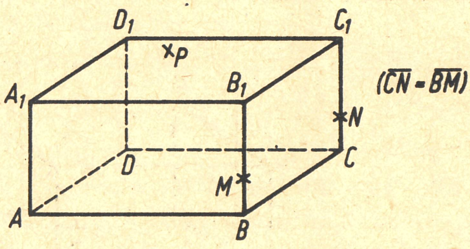
171043 B

Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt ist dreimal ein Quader $ABCDA_1B_1C_1D_1$ in schräger Parallelprojektion dargestellt. Auf BB_1 liegt ein Punkt M, auf CC_1 ein Punkt N und im Innern der Rechtecksfläche $A_1B_1C_1D_1$ ein Punkt P.

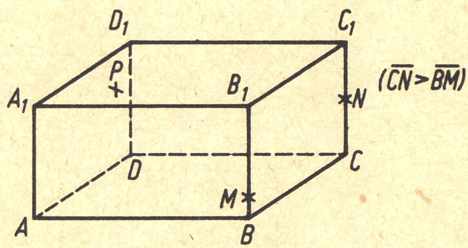
Konstruieren Sie auf dem beigefügten Arbeitsblatt (in der verwendeten perspektivischen Darstellung) für die angegebenen drei Lagen dieser Punkte jeweils die Schnittfigur, die sich als Schnitt des Quaders mit der Ebene ε durch M,N,P ergibt! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

A 10;I

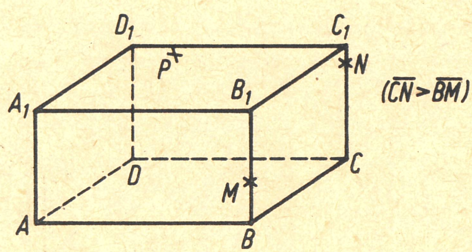
Arbeitsblatt zu 171043 B



1. Fall



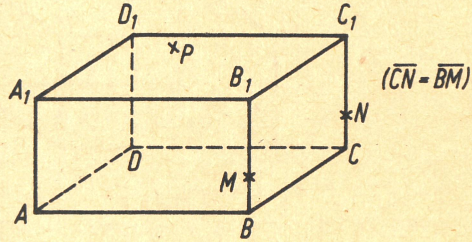
2. Fall



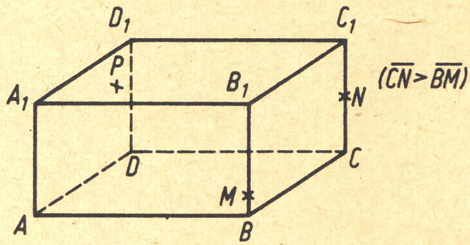
3. Fall

A 10;I

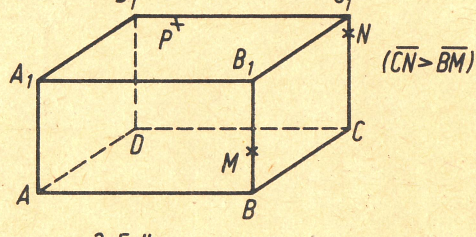
Arbeitsblatt zu 171043 B



1. Fall



2. Fall



3. Fall

korr. nicht

A 10;II XVII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

171044

Gegeben seien zwei von einem Punkt C ausgehende Strahlen s und t, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Ermitteln Sie die Menge der Umkreismittelpunkte aller derjenigen Dreiecke ABC, deren Ecken A und B auf s bzw. t liegen!

171045

Beweisen Sie, daß der Term

$$\frac{\lg(5\sqrt{2} - 7)}{\lg(3 - 2\sqrt{2})}$$

eine reelle Zahl definiert und daß diese rational ist!

171046

Man ermittle alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2},$$
$$x^2 + y^2 = 6.$$

30 06 75-1 (204)

kon.

+

L 10; I XVII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

171041) Lösung: 7 Punkte

I. Angenommen, es gibt ein Quadrat ABCD, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Dann ist nach den Eigenschaften des Quadrates g eine seiner Symmetrieachsen, und B und D liegen nicht auf g und sind bezüglich g symmetrisch gelegene Punkte. Demzufolge liegt D sowohl auf k_2 als auch auf dem Kreis k_1', der durch Spiegelung von k_1 an g entsteht. Ferner ist der Schnittpunkt von g und BD der Diagnonalenschnittpunkt des Quadrates ABCD, also von allen vier Ecken A,B,C,D gleichweit entfernt. Daraus ergibt sich, daß ein Quadrat ABCD nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man spiegelt k_1 an g.
Das Bild von k_1 sei k_1' genannt.

(2) Haben k_1' und k_2 wenigstens einen gemeinsamen nicht auf g gelegenen Punkt, so bezeichnen wir einen solchen gemeinsamen Punkt mit D.

(3) Man spiegelt D an g. Der Bildpunkt sei B genannt.

(4) BD schneidet die Gerade g in genau einem Punkt E, da g Mittelsenkrechte zu DB ist. Von E aus trägt man auf g nach jeder Seite eine Strecke der Länge $\overline{EB} = \frac{\overline{BD}}{2}$ ab. Die so entstehenden beiden Punkte seien A und C genannt.

III. Beweis, daß diese Konstruktion zu einem Quadrat ABCD der geforderten Art führt:

Als Schnittpunkt von k_2 und k_1' liegt D, wie gefordert, auf k_2, und B liegt als der zu D bezüglich g symmetrisch gelegene Punkt auf k_1. Wegen $\overline{DE} = \overline{EB} = \overline{EC} = \overline{EA}$ und $\overline{DE} \neq 0$ ist ABCD ein Rechteck und wegen $DB \perp AC$ folglich ein Quadrat.

IV. 1) Fallen k_1' und k_2 zusammen, dann gibt es unendlich viele Quadrate, die den Bedingungen genügen (keine Abb.).

2) Schneiden k_1' und k_2 einander in zwei nicht auf g und nicht symmetrisch zu g gelegenen Punkten, so gibt es genau zwei Quadrate der verlangten Art (Abb. L 1041_1).

3) Haben k_1' und k_2 genau zwei nicht auf g, aber symmetrisch zu g gelegene Punkte gemeinsam,
oder haben sie genau zwei Punkte gemeinsam, von denen genau einer auf g liegt,
oder berühren sich k_1' und k_2 in einem nicht auf g gelegenen Punkt,
dann gibt es genau ein den angegebenen Bedingungen genügendes Quadrat (Abb. L 1041_{21}, 1041_{22}, 1041_{23}).

4) Haben k_1' und k_2 keinen Punkt gemeinsam oder berühren sie sich in einem auf g gelegenen Punkt oder schneiden sie sich in zwei Punkten von g, dann gibt es kein Quadrat, das die Bedingungen erfüllt (Abb. L 1041_{31}, 1041_{32}, 1041_{33}).

<u>Schluß der Lösung von 171043:</u>

Nun gilt (wenn in abgekürzter Schreibweise die Gewinnung von z' aus z jeweils durch $z \rightarrow z'$ dargestellt wird):

(1) $33 \rightarrow 102 \rightarrow 11 \rightarrow 2 \rightarrow 10 \rightarrow 1$,

(2) $32 \rightarrow 31 \rightarrow 22 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 1$,

(3) $3 \rightarrow 21 \rightarrow 11 \rightarrow 2 \rightarrow 10 \rightarrow 1$.

In (1), (2), (3) treten aber alle Zahlen (✱) auf.

Damit ist der Satz bewiesen.

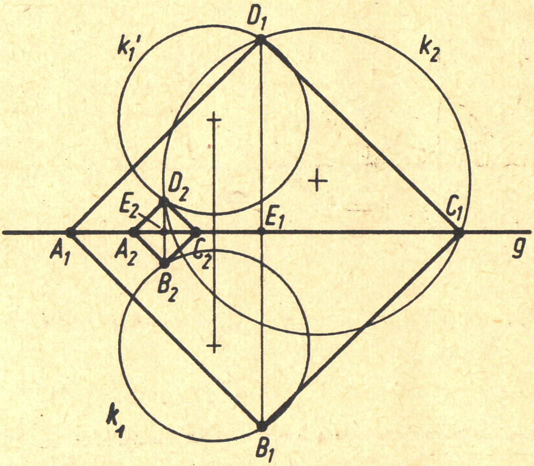


Abb. L 1041_1

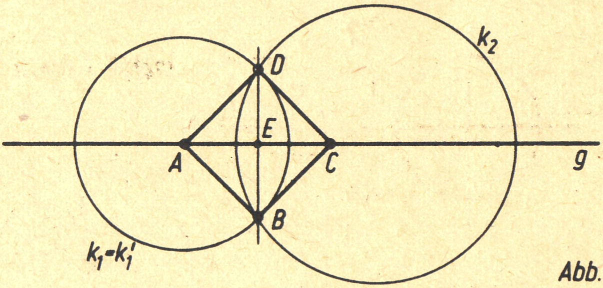


Abb. L 1041_{21}

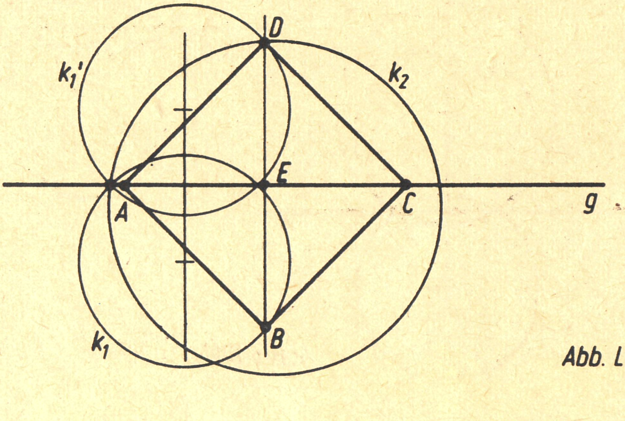


Abb. L 1041_{22}

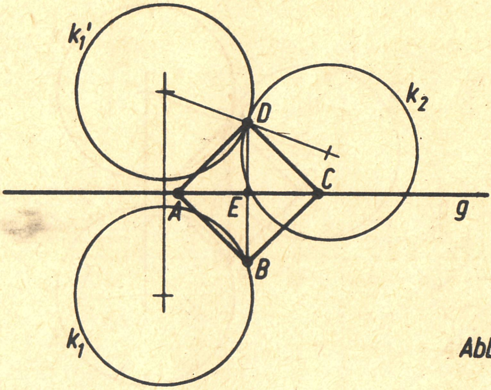


Abb. L 1041_{23}

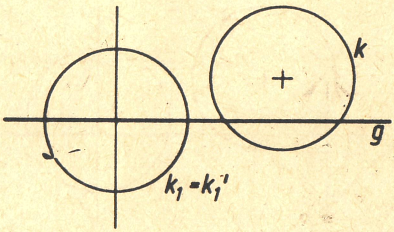


Abb. L 1041_{31}

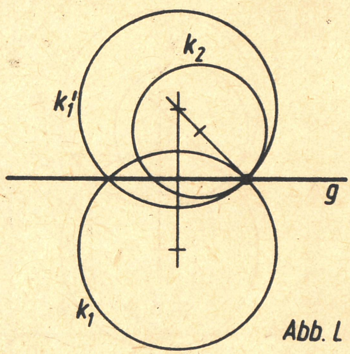


Abb. L 1041_{32}

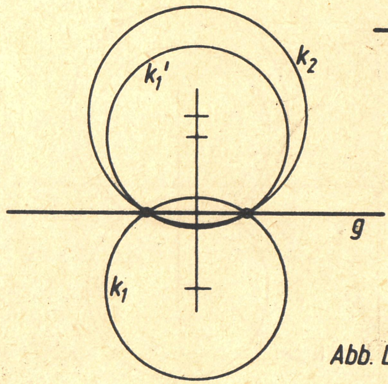


Abb. L 1041_{33}

171042) Lösung: 6 Punkte

Angenommen, eine rationale Zahl x habe die verlangte Eigenschaft. Dann gibt es ganze, zueinander teilerfremde Zahlen p, q mit $q > 0$ und $x = \frac{p}{q}$ sowie eine natürliche Zahl n mit

$$\frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q} + 6 = n^2 .$$

Daraus folgt $p^2 = q\,(-p - 6q + n^2 q)$. Also ist p^2 durch q teilbar. Wäre q durch eine Primzahl teilbar, so müßte diese folglich in p^2 und damit in p enthalten sein, im Widerspruch zur Teilerfremdheit von p und q. Daher ist q = 1, und es gilt:

$$\begin{aligned} p^2 + p + 6 &= n^2. \\ (p + \tfrac{1}{2})^2 &= n^2 - \tfrac{23}{4} . \\ 23 &= 4n^2 - (2p + 1)^2 \\ &= (2n - 2p - 1)(2n + 2p + 1). \end{aligned}$$

Damit ist die Primzahl 23 in zwei ganzzahlige Faktoren zerlegt, deren Summe eine nichtnegative Zahl, nämlich 4n, ist. Folglich scheidet von den beiden einzigen ganzzahligen Zerlegungen $23 = 1 \cdot 23 = (-1)(-23)$ die zweite aus, und es gilt

entweder $2n - 2p - 1 = 1$, $2n + 2p + 1 = 23$
oder $2n - 2p - 1 = 23$, $2n + 2p + 1 = 1$.

Im ersten Fall folgt $n - p = 1$, $n + p = 11$ und daraus $p = 5$,
im zweiten folgt $n - p = 12$, $n + p = 0$ und daraus $p = -6$.

Folglich können nur die Zahlen $x = 5$ und $x = -6$ die geforderten Eigenschaften haben.

Tatsächlich ist sowohl $25 + 5 + 6 = 36$ als auch $36 - 6 + 6 = 36$ das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Einfacher mit Probl. verf.

L 10;I

171043 A) Lösung: 8 Punkte

a) Es sei $z = a_2 \cdot 4^2 + a_1 \cdot 4 + a_o$ $(1 \leqq a_2 \leqq 3;\ 0 \leqq a_1, a_o \leqq 3)$.

Dann gilt $z' = a_2^2 + a_1^2 + a_o^2$, also

$z - z' = a_2(4^2 - a_2) + a_1(4 - a_1) - a_o(a_o - 1)$.

Wegen der Bedingungen für die a_i gilt nun

$a_2(4^2-a_2) \geqq 1\cdot(16-3) = 13$, ferner $a_1(4-a_1) \geqq 0$, sowie

$a_o(a_o-1) \leqq 6$ und daher $z - z' > 0$, w.z.b.w.

b) Ist z zunächst eine im 4-adischen System mindestens dreistellige Zahl, so gilt $z=a_n\cdot 4^n+a_{n-1}\cdot 4^{n-1} + \ldots + a_1\cdot 4+a_o$ $(n\geqq 2;\ 0\leqq a_i \leqq 3;$ $(i = 0,1,\ldots,n - 1);\ a_n \neq 0)$ und $z' = a_n^2 + a_{n-1}^2 + \ldots + a_1^2 + a_o^2$, also

$z-z'=a_n(4^n-a_n) + a_{n-1}(4^{n-1} - a_{n-1}) + \ldots + a_1(4-a_1)-a_o(a_o-1)$,

was wegen $a_n(4^n-a_n) \geqq 4^2-a_n \geqq 16-3 = 13$, $a_i(4^i-a_i) \geqq 0$ $(i=1,\ldots,(n-1))$, $a_o(a_o-1) \leqq 6$ auf $z - z' > 0$ führt.

Infolgedessen entsteht bei wiederholter Anwendung des genannten Verfahrens eine Zahlenfolge, deren Zahlen, solange sie mindestens dreistellig bleiben, ständig kleiner werden. Demnach muß schließlich eine ein- oder zweistellige Zahl auftreten.

Nun sind sämtliche ein- bzw. zweistelligen im 4-adischen System dargestellten Zahlen ($\neq 0$) (wobei wir jeweils die Basis 4 aus Gründen der Vereinfachung fortlassen):

1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33.

Da bei z' jeweils die Summe der Quadrate der durch die einzelnen Ziffern 0,1,2,3 dargestellten Zahlen auftritt, hat die Reihenfolge der Ziffern auf z' keinen Einfluß. Aus demselben Grunde kann die Ziffer 0 fortgelassen werden. Ferner gilt $[1]_4^2 = 1$. Folglich genügt es, die folgenden Zahlen zu betrachten:

33, 32, 31, 3, 22, 21, 2, 11. (✱)

171043 B) Lösung: 8 Punkte

Im 1. Fall folgt aus $\overline{BM} = \overline{CN}$, daß $MN \parallel BC$ gilt. Die Ebene ε durch M,N,P ist mithin parallel zu BC, B_1C_1 und A_1D_1. Daher schneidet sie die Ebene durch A_1,B_1,C_1,D_1 in derjenigen Geraden, die durch P parallel zu B_1C_1 verläuft. Da bei Parallelprojektion parallele Geraden wieder in solche übergehen, erhält man die (Darstellung der) Schnittfigur MNUV, indem man die Parallele durch P zu B_1C_1 mit den Strecken C_1D_1 und A_1B_1 zum Schnitt U bzw. V bringt.

Im 2. Fall gilt zunächst:

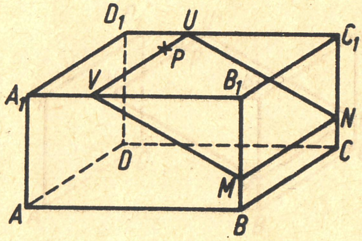
Die Punkte M,N,B_1,C_1 liegen in derselben Ebene. Da wegen $\overline{CN} > \overline{BM}$ ferner $MN \nparallel B_1C_1$ ist, schneiden sich die Geraden durch M und N bzw. durch B_1 und C_1 in einem Punkte X, der auf ε liegt. Da X ferner auf der Ebene durch A_1,B_1,C_1,D_1 liegt, die auch P enthält, muß auch die Gerade durch X und P einerseits auf dieser Ebene und andererseits auf ε liegen, sie ist mithin die Schnittgerade dieser beiden Ebenen.

Bei der im 2. Fall angegebenen Lage des Punktes P schneidet diese Schnittgerade die Kanten C_1D_1 bzw. A_1B_1 in Punkten U bzw. V. Folglich ist die Vierecksfläche MNUV die gesuchte Schnittfläche.

Im 3. Fall findet man zunächst wie im 2. Fall die Schnittgerade durch X und P.

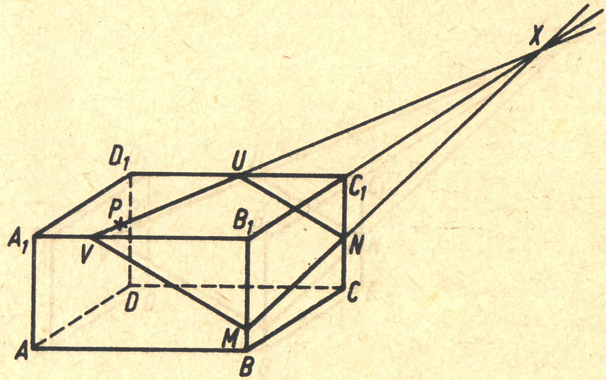
Bei der im 3. Fall angegebenen Lage des Punktes P schneidet diese Schnittgerade die Kanten C_1D_1 bzw. A_1D_1 in Punkten U bzw. V. Da außer dieser Schnittgeraden auch die Gerade durch A_1,B_1 in der Ebene durch A_1,B_1,C_1,D_1 liegt und $UV \nparallel A_1B_1$ gilt, schneiden sich diese beiden Geraden in einem Punkt Y der erwähnten Ebene, der als Punkt der Schnittgeraden auch der Ebene ε angehört. Daher liegt auch die Gerade durch Y und M in ε. Diese Gerade schneidet die Kante AA_1 im Punkt W.

Mithin ist die gesuchte Schnittfläche die Fläche des Fünfecks M N U V W. (Andere Lösungsfortsetzungen zur Konstruktion von W bestehen darin, daß man $MW \parallel NU$ oder $VW \parallel NM$ nachweist und anwendet.)

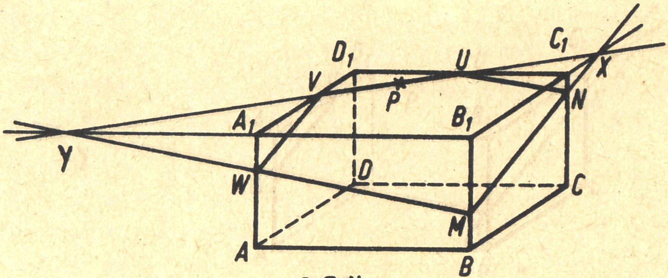


1. Fall

Abb. L 1043 B



2. Fall



3. Fall

korr.

L 10;II XVII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
<u>Lösungen und Punktbewertung</u>
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

<u>171044) Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Es seien g und h die auf s bzw. t senkrechten Geraden durch C. Unter den von C ausgehenden Strahlen auf g und h gibt es je genau einen s' bzw. t' so, daß der von s' und t' gebildete nicht überstumpfe Winkel W in dem von s und t gebildeten enthalten ist oder ihn enthält+).

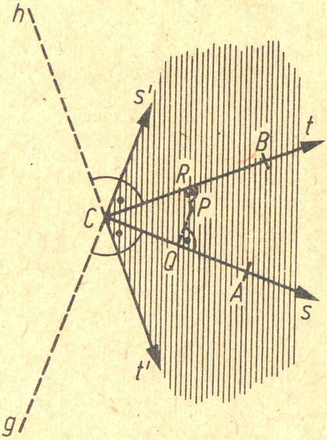
Wenn nun ein Punkt P Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ABC mit $A \in s$ und $B \in t$ ist, so ist P der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von CA und CB, also zweier Geraden, die sich im Innern des Winkels W schneiden. Daher können nur Punkte im Innern von W der gesuchten Menge angehören.

Wenn umgekehrt ein Punkt P im Innern von W liegt, so liegen die Fußpunkte Q bzw. R der Lote von P auf diejenigen Geraden, die s bzw. t enthalten, auf den Strahlen s bzw. t selbst und sind von C verschieden. Verlängert man die Strecken CQ und CR um ihre eigene Länge über Q bzw. R hinaus, so erhält man folglich Punkte A bzw. B, die ebenfalls auf s bzw. t liegen und zusammen mit C ein Dreieck ABC bilden. Nach dem Kongruenzsatz sws gilt ferner $\triangle CQP \cong \triangle AQP$ und ebenso $\triangle CRP \cong \triangle BRP$, woraus $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ folgt. Daher gehört P der gesuchten Menge an.

Somit ist die gesuchte Menge das Innere von W.

+) Bemerkung zur Korrektur: Statt des obigen Textes können s' und t' auch unter stärkerer Bezugnahme auf die Abbildungen definiert werden. Jedenfalls aber muß ein Verfahren zur Auswahl von s' und t' aus g und h angegeben sein.

30 06 75-1



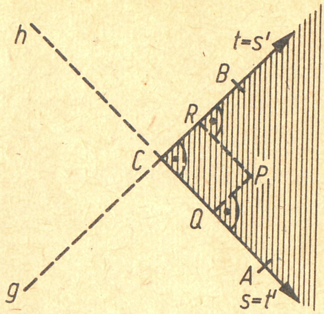
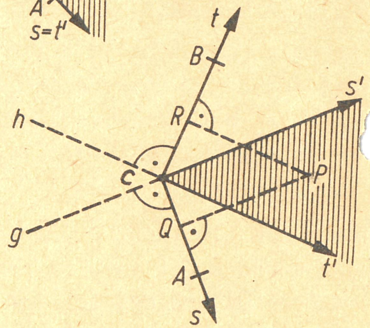


Abb. L 1044



<u>171045) Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Wegen $5^2 \cdot 2 > 7^2$ ist $5\sqrt{2} - 7 > 0$,

und wegen $2^2 \cdot 2 < 3^2$ sowie $2^2 < 2^2 \cdot 2$ ist $0 < 3 - 2\sqrt{2} < 1$.

Daher existieren Zähler und Nenner von z, und der Nenner ist ungleich 0. Also definiert der angegebene Term eine reelle Zahl.

Ferner gilt

$(3 - 2\sqrt{2})^2 = 17 - 12\sqrt{2}$.

$(5\sqrt{2} - 7)^2 = 99 - 70\sqrt{2}$.

$(3 - 2\sqrt{2})^3 = 99 - 70\sqrt{2}$.

also

$(5\sqrt{2} - 7)^2 = (3 - 2\sqrt{2})^3$.

Daraus folgt durch Logarithmieren

$2 \cdot \lg(5\sqrt{2} - 7) = 3 \cdot \lg(3 - 2\sqrt{2})$. **Daher gilt**

$$\frac{\lg(5\sqrt{2} - 7)}{\lg(3 - 2\sqrt{2})} = \frac{3}{2},$$

und dies ist eine rationale Zahl, w.z.b.w.

171046) Lösung: 7 Punkte

Wenn $(x;y)$ eine Lösung von

$$x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2}, \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 = 6 \qquad (2)$$

ist, so folgt $x(1+y) = 2 + 3\sqrt{2} - y$

sowie $x^2(1+y)^2 + y^2(1+y)^2 = 6(1+y)^2$,

also $(2+3\sqrt{2} - y)^2 + y^2(1+y)^2 = 6(1+y)^2$,

$$y^4 + 2y^3 - 4y^2 - (16 + 6\sqrt{2})y + 16 + 12\sqrt{2} = 0 . \qquad (3)$$

(Z.B. bei dem Versuch, die irrationalen Summanden für sich genommen einander aufheben zu lassen, vermutet man $y = 2$ als eine Lösung. In der Tat ist dies eine, und die Polynomdivision $(y^4+2y^3-4y^2-(16+6\sqrt{2})y+16+12\sqrt{2}) : (y-2)$ ergibt:) *)

Es gilt $y^4+2y^3-4y^2-(16+6\sqrt{2})y+16+12\sqrt{2}) = (y^3+4y^2+4y-(8+6\sqrt{2}))\cdot(y-2)$.

Aus (3) folgt daher

$$y=2 \text{ oder } y^3+4y^2+4y-(8+6\sqrt{2}) = 0.$$

(Z.B. auf Grund der Beobachtung, daß $y=2$ und (1) zu $x=\sqrt{2}$ führt und (1), (2) in x,y symmetrisch sind, vermutet man $y=\sqrt{2}$ als eine Lösung. In der Tat ist dies eine, und die Polynomdivision $(y^3+4y^2+4y-(8+6\sqrt{2})):(y-\sqrt{2})$ ergibt:) *)

Es gilt $y^3+4y^2+4y-(8+6\sqrt{2}) = (y^2+(4+\sqrt{2})y+6+4\sqrt{2})\cdot(y-\sqrt{2})$. Aus (3) folgt daher $y=2$ oder $y=\sqrt{2}$ oder $y^2+(4+\sqrt{2})y + 6+4\sqrt{2} = 0$.

Die letztgenannte Gleichung besitzt wegen $(4+\sqrt{2})^2-4\cdot(6+4\sqrt{2}) =$

$= -6-8\sqrt{2}<0$ keine reelle Lösung.

Aus $y = 2$ und (1) folgt $x = \sqrt{2}$; aus $y = \sqrt{2}$ und (1) folgt $x = 2$. Daher können nur die Paare $(2;\sqrt{2})$ und $(\sqrt{2}; 2)$ Lösungen von (1), (2) sein.

In der Tat gilt für sie $x+y=2+\sqrt{2}$, $xy=2\sqrt{2}$, also (1), sowie $x^2+y^2 = 6$, d.h. (2).

---

*) Diese heuristischen Angaben sind zu einer vollständigen Lösung nicht erforderlich.

Andere Lösungsmöglichkeit:

Ist $(x;y)$ eine Lösung des Systems (1), (2) und sind p, q diejenigen Zahlen, für die die Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0 \qquad (4)$$

die Zahlen x und y als Lösungen hat (im Fall $x = y$ diese Zahl x als einzige Lösung), so gilt nach den Vietaschen Sätzen

$$x + y = -p \quad \text{und} \quad x \cdot y = q,$$

also $x^2+y^2 = (x+y)^2-2xy = p^2 - 2q$. Somit folgt aus (1), (2)

$$-p+q = 2 + 3\sqrt{2}, \qquad (5)$$

$$p^2-2q = 6. \qquad (6)$$

Durch Auflösen von (5) nach q und Einsetzen in (6) ergibt sich

$$p^2-2p-2(5+3\sqrt{2}) = 0.$$

Diese Gleichung hat genau die Lösungen

$$p_1 = 4 + \sqrt{2} \quad \text{und} \quad p_2 = -(2+\sqrt{2}),$$

wonach (5) auf $q_1 = 6+\sqrt{2}$ bzw. $q_2 = 2\sqrt{2}$ führt.

Die mit p_1, q_1 gebildete Gleichung (4) hat keine reelle Lösung; die mit p_2, q_2 gebildete Gleichung (4) hat 2 und $\sqrt{2}$ als Lösungen. Also können nur $(2;\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}; 2)$ Lösung des Systems (1), (2) sein. Die Probe kann wie im 1. Lösungsweg erfolgen.