A 10;I

XVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

171031

Es seien a und b positive reelle Zahlen, n eine natürliche Zahl. Beweisen Sie, daß dann

$$(a + b)^n \leq 2^n (a^n + b^n) \text{ gilt!}$$

171032

Es sei ABCD ein nicht überschlagenes Viereck, das die Seitenlängen $\overline{AB} = 9$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{CD} = 11$ cm, $\overline{AD} = 8$ cm hat und in dem der Innenwinkel bei B eine Größe von 110° hat.
Untersuchen Sie durch Konstruktion, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt von ABCD eindeutig bestimmt ist! Begründen und beschreiben Sie eine Konstruktion derjenigen Länge $\overline{UV}$, die die Seitenlänge eines zu ABCD flächeninhaltsgleichen Quadrates UVWX ist!

171033

Jens, Uwe, Dirk und Peter diskutieren darüber, welchem Zahlenbereich die Zahl z angehört, die durch den Term

$$z = \frac{\lg(7 - 4\cdot\sqrt{3})}{\lg(2 - \sqrt{3})}$$

definiert werden soll.
Jens sagt, daß z eine natürliche Zahl ist, Dirk meint, die Zahl z sei eine rationale Zahl, Uwe hält z für irrational, und Peter vermutet, daß der Term überhaupt keine Zahl z definiert.
Entscheiden Sie, wer recht hat!

XVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

171034

Geben Sie alle Primzahlen p an, für die $3p + 4 = z^2$ gilt, wobei z eine natürliche Zahl ist!

171035

Aus den natürlichen Zahlen von 1 bis 200 werden 101 verschiedene Zahlen beliebig ausgewählt.
Es ist zu zeigen, daß bei jeder solchen Auswahl unter den ausgewählten Zahlen mindestens zwei existieren, so daß die eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist.

171036

Gegeben sei der Radius r eines Kreises k. Unter allen zu k konzentrischen Kreisen k', deren Radius r' größer als r ist, seien diejenigen betrachtet, für die folgendes gilt:

(1) Es gibt ein gleichseitiges Dreieck ABC so, daß A auf k' liegt und B und C auf k liegen.

a) Beweisen Sie, daß unter allen so entstehenden Dreiecken ABC auch solche mit maximalem Flächeninhalt existieren und daß diese für genau einen Wert r_1' von r' zustandekommen! Drücken Sie diesen Wert r_1' und diesen maximalen Flächeninhalt F_1 durch r aus!

b) Zeigen Sie, daß für den Wert r_1' auch noch Dreiecke ABC existieren, die (1) erfüllen und einen Flächeninhalt $F_0 < F_1$ haben! Beweisen Sie, daß es genau einen solchen Flächeninhalt F_0 gibt und drücken Sie ihn durch r aus!

c) Beweisen Sie, daß es genau einen Wert r_2' von r' mit folgender Eigenschaft gibt: Alle Dreiecke ABC, die (1) für dieses r' erfüllen, haben denselben Flächeninhalt! Drücken Sie diesen Wert r_2' und den zugehörigen Flächeninhalt F_2 durch r aus!

XVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
<u>Lösungen und Punktbewertung</u>
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

<u>171031) Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Es sei o.B.d.A. $a \leqq b$. Dann gilt

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^n &\leqq (2b)^n\\ (a+b)^n &\leqq 2^n b^n\end{aligned}\right\}$$
, da a durch eine höchstens größere Zahl ersetzt wurde.

Ferner gilt (*) $(a+b)^n \leqq 2^n b^n + 2^n a^n$, da auf der größeren Seite eine positive Zahl addiert wurde, also auch

$$(a+b)^n \leqq 2^n(a^n + b^n),$$ w.z.b.w.

(Ab (*) kann sogar < geschrieben werden)

<u>171032) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Durch die Angaben über $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{\sphericalangle ABC}$ ist das Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt. Wie eine Konstruktion zeigt, haben die Kreise um A bzw. C mit 8 cm bzw. 11 cm als Radius genau zwei Schnittpunkte. Genau einer von ihnen liegt nicht auf derselben Seite der Geraden durch A und C wie B; dieser sei D genannt, der andere D^*. Die Konstruktion ergibt, daß $ABCD^*$ ein überschlagenes Viereck wird. Somit ist durch die Angaben über $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{\sphericalangle ABC}$ ein nicht überschlagenes Viereck ABCD bis auf Kongruenz eindeutig und daher auch sein Flächeninhalt eindeutig bestimmt.
Die Lote von B und D auf AC seien BB' bzw. DD'. Dann hat ABCD den Flächeninhalt $\frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BB'} + \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{DD'} = \overline{AC} \cdot \frac{1}{2}(\overline{BB'} + \overline{DD'})$. Daher hat ein Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{AC}$ und $\frac{1}{2}(\overline{BB'} + \overline{DD'})$ denselben Flächeninhalt. Sind M, N die Mittelpunkte von BB' bzw. DD', so haben die Parallelen zu AC durch M bzw. N den Abstand $\frac{1}{2}(\overline{BB'} + \overline{DD'})$ voneinander. Daher entsteht durch diese Parallelen und durch die in A bzw. C auf AC errichteten Senkrechten ein Recht-

eck EFGH, das die genannten Längen als Seitenlängen hat.

Ist etwa $\overline{EF} > \overline{FG}$, liegt G' so auf EF, daß $\overline{FG'} = \overline{FG}$ gilt und ist EFV ein bei V rechtwinkliges Dreieck, für das VG' das Lot von V auf EF ist, so ist nach dem Kathetensatz $\overline{FV}^2 = \overline{EF} \cdot \overline{FG'} = \overline{EF} \cdot \overline{FG}$, also ein über FV errichtetes Quadrat zu EFGH flächeninhaltsgleich.

Daher führt (z. B.) die folgende Konstruktion zu der gesuchten Länge $\overline{UV}$:

(1) Man konstruiert die Parallelen p bzw. q durch die Mittelpunkte M bzw. N von BB' bzw. DD' zu AC.

(2) Man errichtet die Senkrechten s bzw. t in A bzw. C auf AC.

(3) Die Parallele p schneidet s bzw. t in E bzw. F; q schneidet s bzw. t in H bzw. G. Hierbei wird EFGH ein Rechteck mit $\overline{EF} > \overline{FG}$.

(4) Der Kreis um F durch G schneidet EF in G'.

(5) Die Senkrechte in G' auf EF schneidet einen Halbkreis über EF in V.

(6) Man setze F = U. Die Strecke UV hat die geforderte Länge; ein über ihr errichtetes Quadrat UVWX ist zu ABCD flächeninhaltsgleich.

Abb. L 1032 siehe nächste Seite

171033) Lösung: 7 Punkte

Es gilt $2 - \sqrt{3} > 0$, also ist $\lg (2 - \sqrt{3})$ definiert. Ferner gilt

$$(2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3$$
$$= 7 - 4\sqrt{3},$$

also ist auch $7 - 4\sqrt{3} > 0$ und folglich $\lg (7 - 4\sqrt{3})$ definiert. Ferner ist $2 - \sqrt{3} \neq 1$, also $\lg(2 - \sqrt{3}) \neq 0$; somit wird durch den gegebenen Term eine Zahl z definiert, und für sie folgt außerdem

$$z = \frac{\lg(2 - \sqrt{3})^2}{\lg(2 - \sqrt{3})}, \text{ also } z = \frac{2\lg(2 - \sqrt{3})}{\lg(2 - \sqrt{3})} = 2.$$

Daher haben Jens und Dirk recht, Uwe und Peter haben nicht recht.

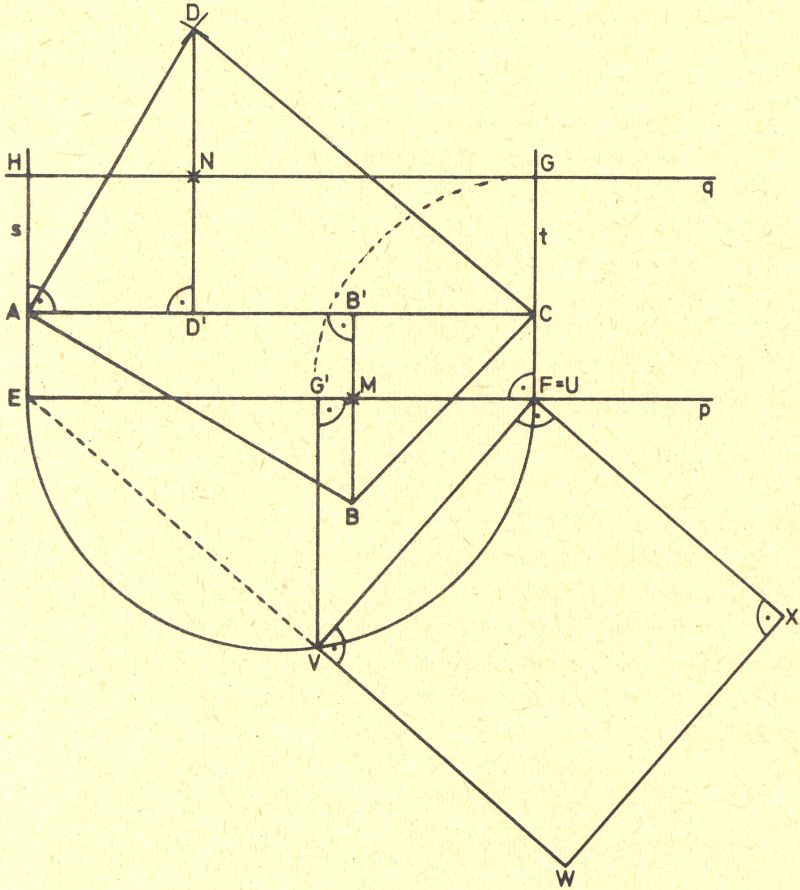


Abb. L 1032

XVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

171034) Lösung: 6 Punkte

Angenommen, es gibt eine derartige Primzahl p, dann ist mit einer natürlichen Zahl z

$3p + 4 = z^2$, also
$3p = z^2 - 4$,
$3p = (z + 2)(z - 2)$.

Da 3p und z + 2 positiv sind, ist auch z - 2 eine positive ganze Zahl. Die einzigen Möglichkeiten, 3p in positiv ganzzahlige Faktoren zu zerlegen, bestehen aber darin, daß die Faktoren entweder 1 und 3p oder 3 und p lauten. Ferner haben z + 2 und z - 2 die Differenz 4 voneinander. Daher würde die Zerlegung mit 1 als Faktor auf 5 als zweiten Faktor führen und somit nicht auf einen Faktor der Form 3p. Also bleibt nur die Möglichkeit, daß ein Faktor 3 und folglich der andere p = 7 lautet.
Tatsächlich erfüllt p = 7 die Bedingung $3 \cdot 7 + 4 = 25 = 5^2$.
Die einzige Primzahl, die die gestellte Bedingung erfüllt, ist 7.

171035) Lösung: 6 Punkte

Die Anzahl der geraden unter den 101 ausgewählten Zahlen sei m. Dann ist (101 - m) die Anzahl der ungeraden unter den ausgewählten Zahlen. Dividiert man jede der m geraden Zahlen jeweils durch die höchste in ihr enthaltene Zweierpotenz, so erhält man als Quotienten m ungerade Zahlenangaben. Zusammen mit den zuvor genannten 101 - m ungeraden Zahlen hat man somit eine Angabe von 101 ungeraden Zahlen. Da sich unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 200 nur 100 ungerade befinden, müssen mindestens zwei der angegebenen 101 ungeraden Zahlen einander gleich sein. Die ausgewählten Zahlen, aus denen diese beiden übereinstimmenden ungeraden Zahlenangaben gewonnen wurden, unterscheiden sich daher in ihrer Primzerlegung nur um eine Potenz von 2. Die größere von beiden Zahlen ist mithin ein ganzzahliges Vielfaches der kleineren, was zu zeigen war.

17.1036) Lösung: 8 Punkte

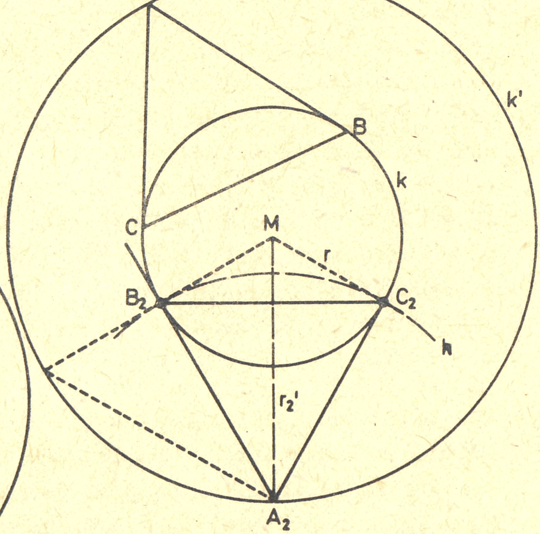
a) Der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC, das (1) erfüllt, ist genau dann maximal, wenn $\overline{BC}$ maximal ist. Nun gibt es im Kreis k Sehnen BC maximaler Länge, nämlich genau die Durchmesser. Also ist die Existenz von Dreiecken ABC, die (1) erfüllen und maximalen Flächeninhalt haben, bewiesen, wenn noch folgendes gezeigt ist: Wenn B_1C_1 ein Durchmesser von k ist, $A_1B_1C_1$ ein gleichseitiges Dreieck und k' der zu k konzentrische Kreis durch A_1 ist, so ist sein Radius r' größer als r. Dies trifft in der Tat zu; denn es folgt $\overline{B_1C_1} = 2r$ und, wenn M den Mittelpunkt von k bezeichnet, $\overline{MA_1} = r\sqrt{3}$ als **Höhenlänge** im gleichseitigen Dreieck $A_1B_1C_1$. Zugleich ist damit dieser Wert $r' = r\sqrt{3}$ als einzig möglicher in a) genannter Wert für r' nachgewiesen, und als maximaler Flächeninhalt ergibt sich $F_1 = \frac{1}{2}\,\overline{B_1C_1}\cdot\overline{MA_1} = r^2\sqrt{3}$.

b) Sind M, r', $A_1B_1C_1$ wie in a), so schneiden die Geraden durch A_1 und B_1 bzw. C_1 den Kreis k jeweils noch ein zweites Mal, da sie einen Punkt außerhalb k mit je einem Punkt auf k verbinden und nicht auf MB_1 bzw. MC_1 senkrecht stehen. Der jeweils erhaltene zweite Schnittpunkt sei B_o bzw. C_o. Bei Spiegelung an der Geraden durch A_1 und M geht B_1 in C_1 über, A_1 und k gehen in sich über, also geht B_o in C_o über.
Daher ist $\triangle A_1B_oC_o$ gleichschenklig mit $\overline{A_1B_o} = \overline{A_1C_o}$, wegen $\sphericalangle B_oA_1C_o = 60^\circ$ sogar gleichseitig, folglich erfüllt es (1) und ist außer $A_1B_1C_1$ das einzige Dreieck A_1BC, das (1) erfüllt.
Weiter ist $\triangle MB_1B_o$ gleichschenklig mit $\overline{MB_1} = \overline{MB_o}$, wegen $\sphericalangle MB_1B_o = 60^\circ$ sogar gleichseitig; dasselbe gilt für $\triangle MC_1C_o$
Daher wird auch $\triangle MB_oC_o$ mit $\overline{MB_o} = \overline{MC_o}$ und $\sphericalangle B_oMC_o = 60^\circ$ gleichseitig, folglich ist $\overline{B_oC_o} = r$, und $\triangle A_1B_oC_o$ hat den (damit eindeutig bestimmten) Flächeninhalt $F_o = \frac{1}{4}r^2\sqrt{3} < F_1$.

c) Für jeden überhaupt zu betrachtenden Wert von r' gilt: Ist A_2 irgendein Punkt auf k' und ist ABC irgendein Dreieck, das (1) für dieses r' erfüllt, so geht dieses durch eine geeignete Drehung um M in ein Dreieck $A_2B_2C_2$ über, das ebenfalls (1) für dieses r' erfüllt. Daher hat ein Wert r' genau dann die in c) genannte Eigenschaft, wenn für einen einzigen Punkt A_2 auf k' alle Dreiecke $A_2B_2C_2$, die (1) für r' erfüllen, dieselbe Seitenlänge haben. Damit ist gleichwertig, daß es genau einen Kreis h um A_2 gibt, der k in zwei Punkten B_2,C_2 mit $\overline{B_2C_2} = \overline{A_2B_2}$ oder, wegen $\overline{A_2B_2} = \overline{A_2C_2}$ äquivalent hierzu, mit $\sphericalangle\ \overline{B_2A_2C_2} = 60^\circ$ schneidet. Nun gehen k und jeder Kreis h um A_2 bei Spiegelung an der Geraden durch A_2 und M in sich über; daher ist die zuletzt genannte Forderung äquivalent mit $\sphericalangle\ \overline{MA_2B_2} = 30^\circ$. Also hat r' genau dann die genannte Eigenschaft, wenn ein Strahl aus A_2, der mit A_2M einen Winkel von 30° bildet, mit dem Kreis k genau einen Punkt B_2 besitzt, d. h. Tangente an k ist. Hierfür ist notwendig und hinreichend, daß r' die Hypotenusenlänge in einem rechtwinkligen Dreieck ist, in dem eine Kathete r und der ihr gegenüberliegende Winkel 30° beträgt. Durch diese Forderung ist, wie behauptet, genau ein Wert r_2' bestimmt, und zwar ergibt sich:

Spiegelt man ein solches Dreieck MA_2B_2 an der Geraden durch M und B_2, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck; folglich gilt $r_2' = \overline{MA_2} = 2\ \overline{MB_2} = 2r$. Die Höhenlänge $\overline{A_2B_2} = r\sqrt{3}$ dieses Dreiecks ist die Seitenlänge von $\Delta A_2B_2C_2$; folglich beträgt

$F_2 = \frac{1}{4}\ \overline{A\ B}^2\sqrt{3} = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$.



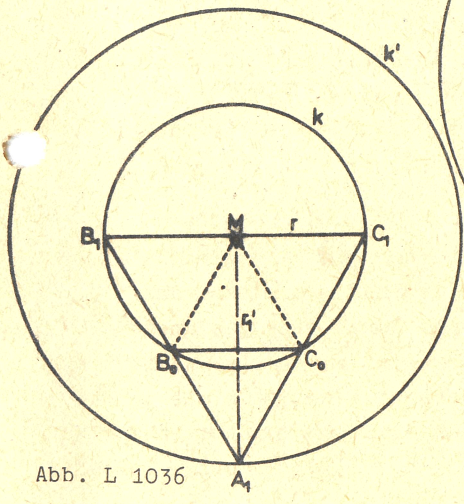


Abb. L 1036