A 10

# XVII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
## 2. Stufe (Kreisolympiade)
## Olympiadeklasse 10

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

### 171021

Von vier Kreisen $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$ wird verlangt, daß sie die folgenden beiden Eigenschaften (1), (2) haben:

(1) Der Durchmesser von $k_4$ ist um 1 cm größer als der Durchmesser von $k_3$, dessen Durchmesser ist um 1 cm größer als der von $k_2$, und dessen Durchmesser ist um 1 cm größer als der von $k_1$.

(2) Der Flächeninhalt von $k_4$ ist so groß wie die Summe der Flächeninhalte der anderen drei Kreise.

Untersuchen Sie, für welche Länge des Durchmessers von $k_1$ diese beiden Forderungen (1), (2) erfüllt sind!

### 171022

Beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn M der Mittelpunkt eines Kreises k ist und wenn eine Gerade g, die durch einen Punkt A von k geht, auf AM senkrecht steht, dann ist sie eine Tangente des Kreises k, d. h. sie hat mit k genau einen Punkt gemeinsam.

### 171023

Man ermittle die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, für die der Term $\lg(x^2 + 7x - 30)$ definiert ist.

A 10

171024

Wenn eine natürliche Zahl $Z \neq 0$ im dekadischen System durch die Ziffernfolge $a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0$ (mit $0 \leq a_i \leq 9$ für $i = 0, \ldots, n$ und mit $a_n \neq 0$) dargestellt ist, so bezeichnen wir als Quersumme Q (Z) dieser Zahl Z die Summe

$Q(Z) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + a_0$

und als Querprodukt P (Z) dieser Zahl Z das Produkt

$P(Z) = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot a_0$.

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen Z mit $0 < Z < 1000$, für die

(1) $Q(Z) + P(Z) = Z$ gilt!

L 10

XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

171021) Lösung: 10 Punkte

Wenn (1) und (2) für eine Länge d cm des Durchmessers von $k_1$ erfüllt sind, so haben $k_2$, $k_3$ und $k_4$ Durchmesser der Längen (d+1)cm, (d+2)cm bzw. (d+3)cm, und es gilt

$\frac{\pi}{4} d^2 + \frac{\pi}{4}(d+1)^2 + \frac{\pi}{4}(d+2)^2 = \frac{\pi}{4}(d+3)^2$. Hieraus erhält man

$d^2 + d^2 + 2d+1 + d^2 + 4d+4 = d^2 + 6d+9$, also

$2d^2 = 4$ und wegen $d > 0$ daraus $d = \sqrt{2}$.

Daher kann nur die Länge $\sqrt{2}$ cm die Forderungen (1) und (2) erfüllen. Sie erfüllt sie tatsächlich; denn für diese Länge ergeben sich als Flächeninhalte der vier Kreise

$$A_1 = \frac{\pi}{4}(\sqrt{2})^2 \text{ cm}^2 = \frac{\pi}{4}\, 2 \text{ cm}^2,$$
$$A_2 = \frac{\pi}{4}(\sqrt{2}+1)^2 \text{ cm}^2 = \frac{\pi}{4}(3+2\cdot\sqrt{2})\text{cm}^2,$$
$$A_3 = \frac{\pi}{4}(\sqrt{2}+2)^2 \text{ cm}^2 = \frac{\pi}{4}(6+4\cdot\sqrt{2})\text{cm}^2,$$
$$A_4 = \frac{\pi}{4}(\sqrt{2}+3)^2 \text{ cm}^2 = \frac{\pi}{4}(11+6\cdot\sqrt{2})\text{cm}^2,$$ und hiermit gilt

$$A_1 + A_2 + A_3 = A_4.$$

171022) Lösung: 8 Punkte

1. Beweis: (direkt)

B sei ein von A verschiedener Punkt auf g.

In dem Dreieck AMB liegt dann die Seite BM nach Voraussetzung einem rechten Winkel und damit dem größten Winkel des Dreiecks gegenüber. Es gilt also $\overline{BM} > \overline{AM}$. Da $\overline{AM}$ Radius von k ist, liegt B außerhalb des Kreises.

Die Gerade g hat also genau einen Punkt mit k gemeinsam.

Sie ist mithin Tangente des Kreises k.

2. Beweis (indirekt)

Angenommen die Gerade g, die mit dem Kreis k den Punkt A gemeinsam hat, wäre nicht Tangente von k.

Dann müßte g den Kreis in einem zweiten, von A verschiedenen Punkt - B genannt - schneiden. Da M wegen $AM \perp g$ nicht auf g läge, entstünde ein Dreieck AMB, und dieses wäre gleichschenklig ($\overline{AM}=\overline{BM}=r$).

Nach dem Satz über Basiswinkel gleichschenkliger Dreiecke ergäbe sich $\overline{\sphericalangle MAB} = \overline{\sphericalangle MBA} = 90^\circ$

und damit $\overline{\sphericalangle MAB} + \overline{\sphericalangle MBA} = 180^\circ$.

Das ist jedoch ein Widerspruch zum Dreiecksinnenwinkelsatz.

Die Annahme muß also falsch sein.

Die Gerade g ist folglich Tangente von k.

171023) Lösung: 10 Punkte

Der Term $\lg(x^2 + 7x - 30)$ ist genau dann definiert, wenn $x^2 + 7x - 30 > 0$ ist. Dazu sind der Reihe nach äquivalent

$$x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 > 30 + \frac{49}{4},$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 > \frac{169}{4},$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{7}{2}\right)^2} > \sqrt{\frac{169}{4}},$$

$$\left|x + \frac{7}{2}\right| > \frac{13}{2},$$

$$x + \frac{7}{2} > \frac{13}{2} \quad \text{oder} \quad x + \frac{7}{2} < -\frac{13}{2}$$

und damit

$$x > 3 \quad \text{oder} \quad x < -10.$$

Daher ist die gesuchte Menge die Menge aller reellen Zahlen x, für die $x > 3$ oder $x < -10$ gilt.

171024) Lösung: 12 Punkte

1) Angenommen, für eine einstellige Zahl Z wäre (1) erfüllt. Dann folgte $a_0 + a_0 = a_0$ und damit $a_0 = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

2) Wenn eine zweistellige Zahl Z die Eigenschaft (1) hat, so folgt

$$a_1 + a_0 + a_1a_0 = 10a_1 + a_0,$$

$$a_1a_0 = 9a_1 \quad \text{, wegen } a_1 \neq 0 \text{ also}$$

$$a_0 = 9.$$

Daher kann eine zweistellige Zahl Z nur dann die Bedingung (1) erfüllen, wenn sie mit der Ziffer 9 endet. Für jede solche Zahl gilt in der Tat $a_1+a_o+a_1a_o = a_1+9+9a_1 = 10a_1 + 9 = 10a_1 + a_o$, also ist die Bedingung (1) erfüllt.

3) Angenommen, für eine dreistellige Zahl Z wäre (1) erfüllt.
Dann folgte

$$a_2 + a_1 + a_o + a_2a_1a_o = 100a_2 + 10a_1 + a_o, \text{ also}$$
$$a_2a_1a_o = 99a_2 + 9a_1,$$

wegen $9 \geqq a_o$ mithin $9a_1a_2 \geqq 99a_2 + 9a_1 \geqq 99a_2$.
Hieraus ergäbe sich wegen $a_2 > 0$ der Widerspruch $a_1 \geqq 11$.
Damit erfüllen für $0 < Z < 1000$ genau die Zahlen 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89 und 99 die Bedingung (1).