XVII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

170931

Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 (einschließlich dieser Grenzen), die weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar sind!

170932

Es sei ABCD ein nicht überschlagenes Viereck, das die Seitenlängen $\overline{AB} = 9$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{CD} = 11$ cm, $\overline{AD} = 8$ cm hat und in dem der Innenwinkel bei B die Größe 110° hat.

Untersuchen Sie durch Konstruktion, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt von ABCD eindeutig bestimmt ist!

Von einem Rechteck EFGH werden nun folgende Eigenschaften gefordert:

(1) Das Rechteck EFGH ist flächeninhaltsgleich dem Viereck ABCD.

(2) A liegt auf der Rechtecksseite EH zwischen E und H, und C liegt auf der Rechtecksseite FG.

(3) Die Rechtecksseite EH steht auf AC senkrecht.

Begründen und beschreiben Sie, wie sich alle diejenigen Punkte konstruieren lassen, die als Eckpunkt E eines Rechtecks EFGH mit den geforderten Eigenschaften (1), (2), (3) auftreten können!

170933

In einem Dreieck ABC sei $\overline{AC} = b = 13$ cm und $\overline{BC} = a = 15$ cm.

Das Lot von C auf die Gerade durch A und B sei CD, und es gelte $\overline{CD} = h_c = 12$ cm.

Ermitteln Sie für alle Dreiecke ABC, die diesen Bedingungen entsprechen, den Flächeninhalt I!

A 9;II

XVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

170934

Für ein gleichschenkliges Trapez ABCD mit $AB \parallel CD$ gelte $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = a$, sowie $\overline{AB} > a$.

a) Beweisen Sie, daß die Diagonale AC den Innenwinkel $\sphericalangle$ DAB des Trapezes halbiert!

b) Berechnen Sie die Länge von AB für den Fall, daß $\overline{\sphericalangle DAB} = 60^\circ$ gilt!

170935

Beweisen Sie folgende Aussage:
Vergrößert man das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen um 1, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl!

170936

Für jedes $i = 1, 2, 3$ seien x_i und y_i zwei beliebige voneinander verschiedene reelle Zahlen, und es sei mit d_i die größere der beiden Zahlen x_i und y_i bezeichnet.

a) Beweisen Sie:
Wenn $x_1 \leqq x_2 + x_3$ und $y_1 \leqq y_2 + y_3$ gilt, dann gilt $d_1 \leqq d_2 + d_3$.

b) Stellen Sie fest, ob auch die folgende Aussage gilt:
Wenn $d_1 \leqq d_2 + d_3$ gilt, dann gilt auch $x_1 \leqq x_2 + x_3$.

XVII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

170931) Lösung: 7 Punkte

Wegen $1000 : 2 = 500$ gibt es 500 Zahlen in diesem Bereich, die durch 2 teilbar sind.

Wegen $333 < 1000 : 3 < 334$ gibt es 333 Zahlen in diesem Bereich, die durch 3 teilbar sind.

Entsprechend erhält man

wegen[1] $1000 : 5 = 200$ genau 200 Zahlen, die durch 5,
wegen[1] $166 < 1000 : 6 < 167$ genau 166 Zahlen, die durch 2 und 3,
wegen[1] $1000 : 10 = 100$ genau 100 Zahlen, die durch 2 und 5,
wegen[1] $66 < 1000 : 15 < 67$ genau 66 Zahlen, die durch 3 und 5 und
wegen[1] $33 < 1000 : 30 < 34$ genau 33 Zahlen, die durch 2, 3 und 5
teilbar sind.

Daraus folgt:

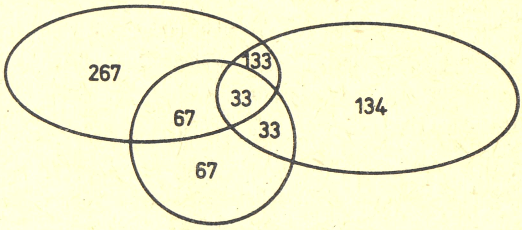
Teilbar durch

2 und 3, aber nicht durch 5 sind $166 - 33 = 133$ Zahlen,
2 und 5, aber nicht durch 3 sind $100 - 33 = 67$ Zahlen,
3 und 5, aber nicht durch 2 sind $66 - 33 = 33$ Zahlen,
2, aber weder durch 3 noch durch 5 sind $500 - (33+133+67) = 267$ Zahlen,
3, aber weder durch 2 noch durch 5 sind $333 - (33+133+33) = 134$ Zahlen,
5, aber weder durch 2 noch durch 3 sind $200 - (33+67+33) = 67$ Zahlen

Damit gibt es in diesem Bereich insgesamt
$33 + 133 + 67 + 33 + 267 + 134 + 67 = 734$ Zahlen, die durch 2, 3 oder 5 teilbar sind. Also sind $1000 - 734 = 266$ Zahlen von 1 bis 1000 weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar.

Der Lösungsweg sei durch das Mengendiagramm zusätzlich veranschaulicht:

teilbar durch 2 teilbar durch 3



teilbar durch 5

1) Ausführung des Schlusses "Sind a, m natürliche Zahlen mit $a \leq 1000 : m < a + 1$, so gibt es genau a Zahlen im Bereich von 1 bis 1000, die durch m teilbar sind": Wegen $am \leq 1000 < (a + 1)\,m$ ist die größte unter den durch m teilbaren Zahlen des Bereichs von 1 bis 1000 die Zahl am. Alle diese Zahlen sind folglich $1 \cdot m, 2 \cdot m, \ldots, a \cdot m$. Daher ist ihre Anzahl a.

2. Lösungsweg:

Eine ganze Zahl ist genau dann weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar, wenn sie zu 30 teilerfremd ist. Unter den Zahlen von 1 bis 30 sind das genau die 8 Zahlen

$$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. \qquad (1)$$

Zerlegt man den Bereich der Zahlen von 1 bis 990 in Abschnitte aus je 30 aufeinanderfolgenden Zahlen, also jeweils von einem $30\,m + 1$ bis $30\,m + 30$ $(= 30\,(m + 1))$, so sind in jedem solchen Abschnitt genau diejenigen Zahlen $30\,m + g$ zu 30 teilerfremd, für die g eine der Zahlen (1) ist. Da es genau 33 solcher Abschnitte gibt, sind genau $33 \cdot 8 = 264$ Zahlen des Bereichs von 1 bis 990 zu 30 teilerfremd. Aus dem Bereich von 991 bis 1020 kommen dazu (für den Bereich bis 1000) noch genau die Zahlen 991 und 997.
Somit beträgt die gesuchte Anzahl 266.

170932) Lösung: 8 Punkte

Durch die Angaben über $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\sphericalangle ABC$ ist das Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt. Wie eine Konstruktion zeigt, haben die Kreise um A bzw. C mit 8 cm bzw. 11 cm als Radius genau zwei Schnittpunkte. Genau einer von ihnen liegt nicht auf derselben Seite der Geraden durch A und C wie B; dieser sei D genannt, der andere D^*. Die Konstruktion ergibt, daß $ABCD^*$ ein überschlagenes Viereck wird. Somit ist durch die Angaben über $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$,

$\sphericalangle \overline{ABC}$ ein nicht überschlagenes Viereck ABCD bis auf Kongruenz eindeutig und daher auch sein Flächeninhalt eindeutig bestimmt.

(I) Angenommen nun, ein Rechteck EFGH habe die Eigenschaften (1), (2), (3). Dann ist AEFC nach (2), (3) ein Viereck mit rechten Winkeln bei A, E und F, also ein Rechteck. Die Seite EF ist somit parallel und gleichlang zur Strecke AC. Die Lote von B und D auf AC seien BB' bzw. DD'. Dann hat ABCD, nach (1) also auch EFGH, den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}\overline{AC}.\overline{BB'} + \frac{1}{2}\overline{AC}.\overline{DD'} = \overline{AC}.\frac{1}{2}(\overline{BB'} + \overline{DD'}) = \overline{EF}.\frac{1}{2}(\overline{BB'} + \overline{DD'}).$$

Daraus folgt $\overline{EH} = \frac{1}{2}(\overline{BB'} + \overline{DD'})$.

Hiernach und wegen (2) hat A von E einen Abstand, der kleiner ist als $\frac{1}{2}(\overline{BB'} + \overline{DD'})$; ferner ist $E \neq A$ und liegt nach (3) auf der in A auf AC errichteten Senkrechten.

(II) Daher kann ein Punkt nur dann als Eckpunkt E eines Rechtecks EFGH mit den Eigenschaften (1), (2), (3) auftreten, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(4) Man errichtet die Senkrechte s in A auf AC.

(5) Man fällt die Lote BB' und DD' von B bzw. D auf AC.

(6) Von A aus trägt man auf s nach beiden Seiten die Strecken AX_1 bzw. AX_2 der Länge $\frac{1}{2}\overline{BB'}$ ab und verlängert sie über X_1 bzw. X_2 hinaus um $\frac{1}{2}\overline{DD'}$ bis zu Y_1 bzw. Y_2.

(7) Man wählt E auf der Strecke Y_1Y_2 verschieden von A, Y_1, Y_2 und sonst beliebig.

(III) Beweis, daß jeder so erhaltene Punkt E Eckpunkt eines Rechtecks EFGH mit den Eigenschaften (1), (2), (3) ist:
Nach (5), (6), (7) ist $\overline{AE} < \frac{1}{2}(\overline{BB'} + \overline{DD'})$ und $E \neq A$. Daher gibt es auf der Verlängerung von EA über A hinaus einen Punkt H mit $\overline{EH} = \frac{1}{2}(\overline{BB'} + \overline{DD'})$. Die Parallelen durch E bzw. H zu AC schneiden die Parallele durch C zu s in F bzw. G. So entsteht ein Rechteck EFGH, das (2), (3) erfüllt. Darin ist EFCA ein Rechteck, also gilt $\overline{EF} = \overline{AC}$. Damit hat EFGH den Flächeninhalt $\overline{EF} . \overline{EH} = \frac{1}{2}\overline{AC}.\overline{BB'} + \frac{1}{2}\overline{AC}.\overline{DD'}$, d. h. denselben Flächeninhalt wie ABCD und erfüllt demnach (1).

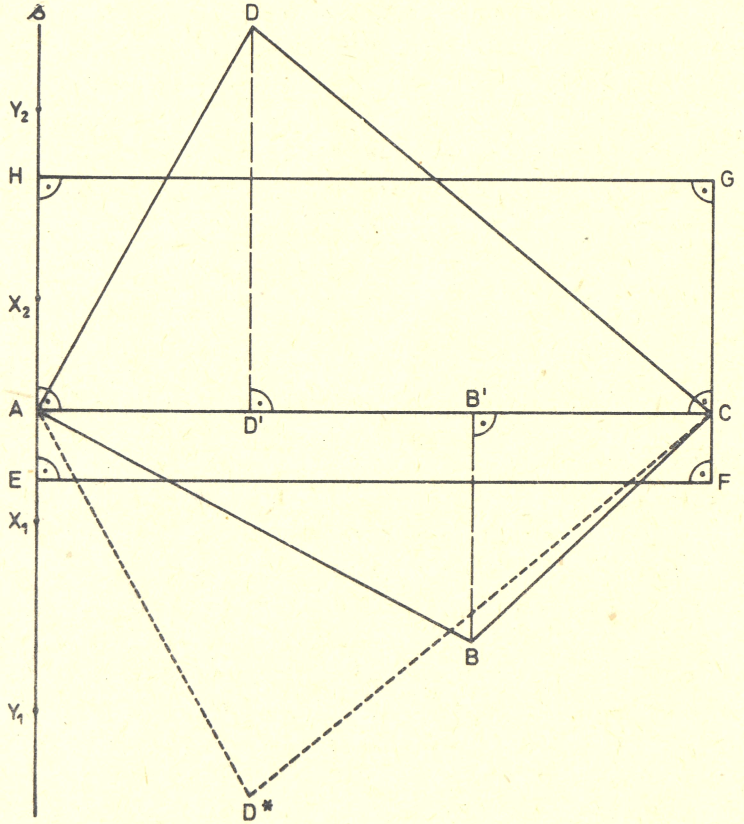


Abb. L 932

<u>170933) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Für die Lage des Punktes D sind nur die beiden folgenden Fälle möglich.

<u>Fall 1:</u> Punkt D liegt zwischen A und B (Abb. L 933 a)

Ein Dreieck ABC mit dieser Eigenschaft, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht, kann wegen $h_c < a$ und $h_c < b$ durch Konstruktion der rechtwinkligen Teildreiecke CDA und CDB auf verschiedenen Seiten der Geraden durch C und D erhalten werden. Für seinen Flächeninhalt I gilt

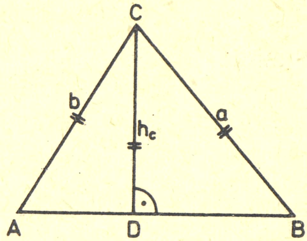


Abb. L 933 a

$I = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\,.\,\overline{CD} = \frac{1}{2}\,(\overline{AD} + \overline{DB})\,.\,\overline{CD}.$

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt nun:

$\overline{AD} = \sqrt{b^2 - h_c^2}\ \text{cm} = \sqrt{169 - 144}\ \text{cm} = \sqrt{25}\ \text{cm} = 5\ \text{cm}$, sowie

$\overline{DB} = \sqrt{a^2 - h_c^2}\ \text{cm} = \sqrt{225 - 144}\ \text{cm} = \sqrt{81}\ \text{cm} = 9\ \text{cm}$ und somit

$I = \frac{1}{2}\,(5 + 9)\,.\,12\ \text{cm}^2 = 84\ \text{cm}^2.$

<u>Fall 2:</u> Punkt D liegt nicht zwischen A und B (Abb. L 933 b)

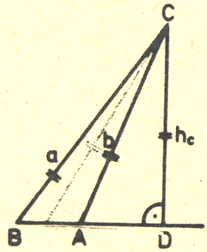


Abb. L 933 b

Da wiederum nach dem Lehrsatz des Pythagoras $\overline{BD} = \sqrt{a^2 - h_c^2}\ \text{cm} = 9\ \text{cm}$,

sowie $\overline{AD} = \sqrt{b^2 - h_c^2}\ \text{cm} = 5\ \text{cm}$

und somit $\overline{BD} > \overline{AD}$ gilt, so entsteht auch für den vorliegenden Fall durch Konstruktion von Dreiecken CDA, CDB, diesmal aber auf derselben Seite der Geraden durch C und D, ein Dreieck ABC, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Für seinen Flächeninhalt I gilt

$$I = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\,.\,\overline{CD} = \frac{1}{2}\,(\overline{BD} - \overline{AD})\,.\,\overline{CD},$$

$$I = \frac{1}{2}\,(9 - 5)\,.\,12\ \text{cm}^2 = 24\ \text{cm}^2.$$

XVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

170934) Lösung: 6 Punkte

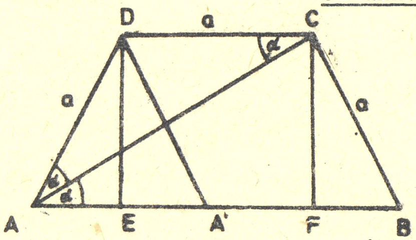


Abb. L 934

Es sei $\overline{\sphericalangle DAC} = \alpha$.

a) Dann ist $\sphericalangle DCA = \alpha$, als Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ACD.

Ferner gilt $\overline{\sphericalangle CAB} = \alpha$, da $\sphericalangle$ CAB und $\sphericalangle$ ACD Wechselwinkel an Parallelen sind.

Folglich gilt $\overline{\sphericalangle DAC} = \overline{\sphericalangle CAB}$, also halbiert AC den Winkel $\sphericalangle$ DAB.

b) Es seien E und F die Fußpunkte der von D bzw. C auf AB gefällten Lote. Wegen $\alpha = 60^\circ$ liegen E und F zwischen A und B.

Spiegelt man AD an DE und ist A' der Bildpunkt von A bei dieser Spiegelung, so liegt A' wegen $DE \perp AB$ auf der Geraden durch A und B, und wegen $\overline{\sphericalangle DAA'} = \overline{\sphericalangle DA'A} = 60^\circ$ ist das Dreieck AA'D gleichseitig.

Wegen $\overline{AE} = \overline{A'E}$ gilt $\overline{AE} = \frac{a}{2}$.

Entsprechend folgt $\overline{FB} = \frac{a}{2}$.

Da EFCD ein Rechteck ist, gilt $\overline{EF} = \overline{DC} = a$.

Somit ist $\overline{AB} = \frac{a}{2} + a + \frac{a}{2} = 2a$.

170935) Lösung: 6 Punkte

Sei x die kleinste der vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Dann ist das um 1 vergrößerte Produkt der vier Zahlen die Zahl $x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$. (1)

Ferner ist $x^2 + 3x + 1$ eine natürliche Zahl, und diese hat das Quadrat $(x^2 + 3x + 1)^2 = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$, also dieselbe

Zahl wie in (1).

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Hinweis: Überlegungen z. B. der Art "Wenn $x^4 + 6x^3 + \ldots + 1$ für jedes x das Quadrat einer natürlichen Zahl ist, dann hat diese die Form $x^2 + mx + 1$, und m genügt einem Koeffizientenvergleich" sind zu einer vollständigen Lösung nicht erforderlich.

170936) Lösung: 6 Punkte

a) Nach Definition von d_2 ist $x_2 \leqq d_2$; nach Definition von d_3 ist $x_3 \leqq d_3$. Hiernach gilt $x_2 + x_3 \leqq d_2 + d_3$; aus der Voraussetzung $x_1 \leqq x_2 + x_3$ folgt daher

$$x_1 \leqq d_2 + d_3. \qquad (1)$$

Nach Definition von d_2 ist $y_2 \leqq d_2$; nach Definition von d_3 ist $y_3 \leqq d_3$. Hiernach gilt $y_2 + y_3 \leqq d_2 + d_3$; aus der Voraussetzung $y_1 \leqq y_2 + y_3$ folgt daher

$$y_1 \leqq d_2 + d_3. \qquad (2)$$

Nach seiner Definition ist d_1 eine der beiden Zahlen x_1, y_1. Daher ist d_1 die linke Seite in einer der beiden Ungleichungen (1), (2), und diese besagt somit $d_1 \leqq d_2 + d_3$, w.z.b.w.

b) Die in b) genannte Aussage gilt nicht. Zum Beweis genügt die Angabe eines Gegenbeispiels:

Es sei z. B. $x_1 = 2$; $x_2 = 1$ und $x_3 = 0$, sowie $y_1 = 0$; $y_2 = 2$ und $y_3 = 1$. Diese Zahlen erfüllen die Voraussetzungen $x_1 \neq y_1$, $x_2 \neq y_2$, $x_3 \neq y_3$.

Für sie ist ferner $d_1 = 2$, $d_2 = 2$ und $d_3 = 1$ laut Definition von d_i. Es gilt also $d_1 \leqq d_2 + d_3$, aber offensichtlich nicht $x_1 \leqq x_2 + x_3$.