XVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 9

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

170921

Für jede reelle Zahl m und jede reelle Zahl n wird durch

$$y = f(x) = mx + n \quad (x \text{ reell})$$

eine Funktion f definiert, deren Graph eine Gerade g ist.

a) Es sei $m = \frac{1}{2}$ und n beliebig reell.
Ermitteln Sie die Koordinaten aller derjenigen Punkte auf g, deren Ordinate doppelt so groß ist wie ihre Abszisse!

b) Es seien m und n beliebig reell.
Ermitteln Sie die Koordinaten aller derjenigen Punkte auf g, deren Ordinate doppelt so groß ist wie ihre Abszisse!
(Stellen Sie insbesondere fest, für welche m und n überhaupt ein solcher Punkt auf g existiert!)

170922

Jens sagt zu Christa:
"Ich kann die Zahl 30 durch einen Term darstellen, der genau dreimal die Zahl 5 und außerdem nur Zeichen von Grundrechenoperationen enthält."
Nach kurzem Besinnen sagt Christa:
"Man kann sogar für jede natürliche Zahl $n > 2$ die Zahl 30 durch einen Term darstellen, der genau n mal die Zahl 5 und außerdem nur Zeichen von Grundrechenoperationen und Klammern enthält."
Beweisen Sie, daß Christas Aussage wahr ist!

A 9

170923

Gegeben seien ein Kreis k und ein Durchmesser AB von k. Der Mittelpunkt von k sei M. Sind C und D so auf k gelegen, daß ABCD ein konvexes Viereck mit $AB \parallel DC$ ist, so sei α die Größe des Winkels $\sphericalangle$ CMB und β die Größe desjenigen spitzen Winkels, den die Sehne DC mit der Tangente t an k in D einschließt.

Man ermittle diejenigen Werte des Abstandes zwischen AB und CD, für die

a) $2\alpha = \beta$,

b) $\alpha = \beta$

gilt.

170924

Die folgende Abbildung A 924 zeigt 11 Würfelnetze.

a) Ermitteln Sie davon diejenigen, die sich in einem Zuge zeichnen lassen, d. h. als ein zusammenhängender Streckenzug, bei dem jede im Netz auftretende Strecke genau einmal durchlaufen wird!

b) Geben Sie für diese Netze je einen Anfangs- und Endpunkt eines solchen Streckenzuges an!

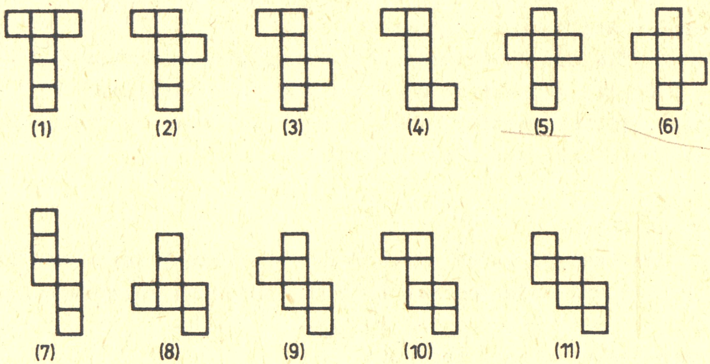

Abb. A 924

XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

170921) Lösung: 9 Punkte

a) [+)] Ein Punkt hat genau dann die verlangten Eigenschaften, wenn für seine Koordinaten x, y sowohl die Gleichung $y = \frac{1}{2}x + n$ als auch die Gleichung $y = 2x$ gilt. Ist dies der Fall, so folgt $2x = \frac{1}{2}x + n$, $x = \frac{2}{3}n$, $y = \frac{4}{3}n$. Daher können nur diese Werte x, y die genannten Gleichungen erfüllen. Wegen $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}n + n = \frac{4}{3}n$ und $2 \cdot \frac{2}{3}n = \frac{4}{3}n$ erfüllen sie in der Tat diese Gleichungen. Also hat (jeweils für ein n) genau der Punkt mit dem Koordinatenpaar $(\frac{2}{3}n, \frac{4}{3}n)$ die verlangten Eigenschaften.

b) Ein Punkt hat genau dann die verlangten Eigenschaften, wenn für seine Koordinaten x, y sowohl die Gleichung $y = mx + n$ als auch die Gleichung $y = 2x$ gilt.
Ist $m = 2$ und $n = 0$, so trifft dies genau für alle Punkte der Geraden zu, die $y = 2x$ als Gleichung hat.
Ist $m = 2$ und $n \neq 0$, so gelten für kein Zahlenpaar (x, y) beide geforderten Gleichungen, also gibt es in diesem Fall keinen Punkt mit den verlangten Eigenschaften.
Ist $m \neq 2$, so gilt: Wenn x, y die geforderten Gleichungen erfüllen, so folgt $2x = mx + n$, $x = \frac{n}{2-m}$, $y = \frac{2n}{2-m}$. Daher können im Fall $m \neq 2$ nur diese Werte x, y die Gleichungen erfüllen. Wegen $m \cdot \frac{n}{2-m} + n = \frac{2n}{2-m}$ und $2 \cdot \frac{n}{2-m} = \frac{2n}{2-m}$ erfüllen sie in der Tat diese Gleichungen. Also hat (jeweils für ein Paar (m, n) mit $m \neq 2$) genau der Punkt mit dem Koordinatenpaar $(\frac{n}{2-m}, \frac{2n}{2-m})$ die verlangten Eigenschaften.

+) Natürlich kann a) auch als Spezialfall von b) gewonnen werden.

170922) Lösung: 8 Punkte

Es gilt z. B.

(1) $5 \cdot 5 + 5 = 30$ und

(2) $5 \cdot (5 + 5 : 5) = 30$.

Da in (1) genau dreimal die Zahl 5 verwendet wird, läßt sich die Aussage für jedes ungerade n erfüllen, indem man z. B. auf der linken Seite von (1) $\frac{n-3}{2}$ mal den Term $5 - 5$ addiert.

Da in (2) genau viermal die Zahl 5 verwendet wird, läßt sich die Bedingung für jedes gerade $n > 2$ erfüllen, indem man z. B. auf der linken Seite von (2) $\frac{n-4}{2}$ mal den Term $5 - 5$ addiert.

170923) Lösung: 11 Punkte

Bei jeder Lage von C, D (auf k, mit ABCD konvex und $AB \parallel DC$) ist

zunächst $\overline{\sphericalangle\ MDC} = \overline{\sphericalangle\ MCD}$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)

$= \overline{\sphericalangle\ CMB}$ (Wechselwinkel an Parallelen)

$= \alpha$.

Da der Radius MD senkrecht auf der Tangente t steht, folgt hieraus $\alpha + \beta = 90^\circ$. (1)

a) Daher gilt genau dann $2\alpha = \beta$, wenn $\alpha = 30^\circ$ ist. Dies gilt genau dann, wenn durch Spiegelung von M an CD ein Punkt E entsteht, für den $\overline{\sphericalangle\ MCE} = 60^\circ$ ist. Da bei dieser Spiegelung $\overline{MC} = \overline{EC}$ gilt, ist die genannte Bedingung genau dann erfüllt, wenn $\triangle$ MCE gleichseitig ist, d. h. genau dann, wenn E auf k liegt. Dies trifft genau dann zu, wenn der Abstand zwischen AB und DC gleich dem halben Radius von k, d. h. gleich $\frac{1}{4}\ \overline{AB}$ ist.

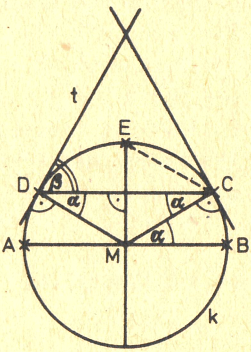

Abb. L 923a

L 9

b) In (1) gilt genau dann $\alpha = \beta$, wenn $\alpha = 45^\circ$ ist, d. h. genau dann, wenn $\triangle$ CDM ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit dem Radius r von k als Kathetenlänge ist. In diesem Dreieck ist die Länge der Höhe durch M gleich dem Abstand von AB zu CD. Wenn das Dreieck gleichschenklig-rechtwinklig ist, so ist nach dem Satz des Pythagoras $\overline{CD} = r\cdot\sqrt{2}$. Ferner zerlegt dann die Höhe MP das Dreieck in zwei gleichschenklig-rechtwinklige Teildreiecke, also ist die Höhenlänge $\overline{MP} = \frac{1}{2}\,\overline{CD} = \frac{r}{2}\cdot\sqrt{2}$.

Wird umgekehrt vorausgesetzt, daß AB und CD den Abstand $\overline{MP} = \frac{r}{2}\sqrt{2}$ voneinander haben, so ist nach dem Satz des Pythagoras $\overline{CP} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \overline{MP}$, also $\sphericalangle MCP = \sphericalangle CMP$, d. h. $\alpha = 45^\circ$.

Daher gilt genau dann $\alpha = \beta$, wenn CD von AB den Abstand $\frac{r}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\,\overline{AB}\sqrt{2}$ hat.

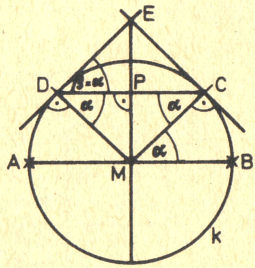

Abb. L 923b

L 9

170924) Lösung: 12 Punkte

Soll ein Streckenzug zu einem Punkt hin und von ihm wieder weg führen, dann muß die Anzahl der in diesem Punkt zusammentreffenden Strecken eine gerade Zahl sein.
Ein Streckenzug der geforderten Art ist daher höchstens möglich, wenn die Figur nicht mehr als 2 Punkte enthält, in denen eine ungerade Anzahl von Strecken zusammentrifft.
Die Tabelle gibt an, wieviel Punkte in denen genau drei Strecken zusammentreffen, bei jedem der Netze existieren.

Nr. des Netzes	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Anzahl solcher Punkte	6	4	4	6	2	2	6	4	2	4	2

Daher lassen sich höchstens die Netze (5), (6), (9) und (11) in einem Zuge zeichnen. Die folgende Probe ergibt, daß dies auch tatsächlich möglich ist:
In der Abbildung L 924 sind Anfangs- und Endpunkte eines solchen Streckenzuges mit A und E bezeichnet, und ein möglicher Streckenzug ist jeweils dargestellt.

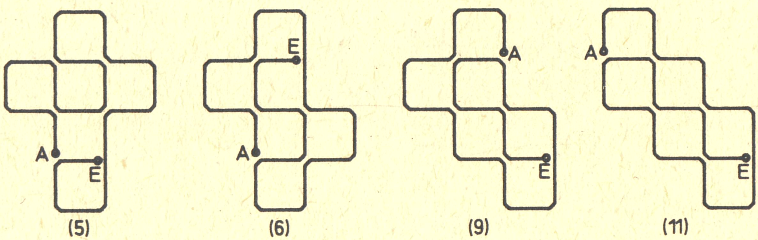

Abb. L 924