XVII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

170831

Es ist zu beweisen: Wenn der Winkel $\sphericalangle$ CBA eines Dreiecks ABC die Größe 30° hat, dann hat die Seite AC des Dreiecks ABC die gleiche Länge wie der Radius des Umkreises k dieses Dreiecks.

170832

Gegeben seien ein Punkt S und zwei von S ausgehende Strahlen a und b, die miteinander einen spitzen Winkel bilden.
Konstruiere im Innern dieses Winkels einen Punkt P, der folgenden Bedingungen entspricht:

(1) P hat von a den doppelten Abstand wie von b.

(2) Die Länge der Strecke SP beträgt 5,0 cm.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob durch die Bedingungen der Aufgabe ein Punkt P eindeutig bestimmt ist!

170833

Die gebrochene Zahl $\frac{9}{91}$ soll als Differenz zweier positiver echter Brüche mit den Nennern 7 und 13 dargestellt werden.
Untersuche, ob es eine solche Darstellung gibt, ob es mehr als eine gibt, und ermittle alle derartigen Darstellungen!

XVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

170834

Eine Pioniergruppe sammelte Altpapier; der gesamte Erlös wurde auf das Solidaritätskonto überwiesen. Die Pioniere bildeten zwei Brigaden, jeder Pionier der Gruppe gehörte genau einer dieser Brigaden an. Über das Sammelergebnis ist folgendes bekannt:

(1) Jeder Pionier der Brigade A sammelte genau 13 kg, außer einem, der nur genau 6 kg mitbrachte.
(2) Jeder Pionier der Brigade B sammelte genau 10 kg, außer einem mit nur genau 5 kg.
(3) Brigade A sammelte insgesamt die gleiche Menge wie Brigade B.
(4) Die gesamte Pioniergruppe sammelte mehr als 100 kg, jedoch weniger als 600 kg Altpapier.

a) Wieviel Pioniere gehörten einer jeden Brigade insgesamt an?
b) Wieviel Mark konnte die Pioniergruppe auf das Solidaritätskonto überweisen, wenn der Altstoffhandel 0,15 Mark pro kg Altpapier bezahlte?

170835

Man ermittle alle geordneten Tripel $[P_1, P_2, P_3]$ von Primzahlen P_1, P_2, P_3 mit $P_2 > P_3$, die der Gleichung

$$P_1 (P_2 + P_3) = 165 \qquad (1)$$

genügen!

170836

Zwei Platten von gleicher Dicke bestehen aus Eichenholz bzw. Stahl.

Der Flächeninhalt der Grundfläche der Eichenplatte ist um 20 % größer als der Flächeninhalt der Grundfläche der Stahlplatte.

Die Dichte des Eichenholzes verhält sich zur Dichte des Stahls wie 1 : 10.

Ermittle, um wieviel Prozent die Masse der Stahlplatte größer als die Masse der Eichenplatte ist!

L 8;I

XVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

170831) Lösung: 5 Punkte

Es sei M der Mittelpunkt und r der Radius von k. Der Winkel $\sphericalangle AMC$ hat nach dem Satz über Zentri- und Peripheriewinkel die Größe 60°. Hieraus, und da das Dreieck AMC wegen $\overline{AM} = \overline{MC} = r$ gleichschenklig ist, folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck $\sphericalangle MCA = \sphericalangle MAC = 60^\circ$, d. h. das Dreieck AMC ist gleichseitig, und es ist $\overline{AC} = \overline{CM} = \overline{MA} = r$, w.z.b.w.

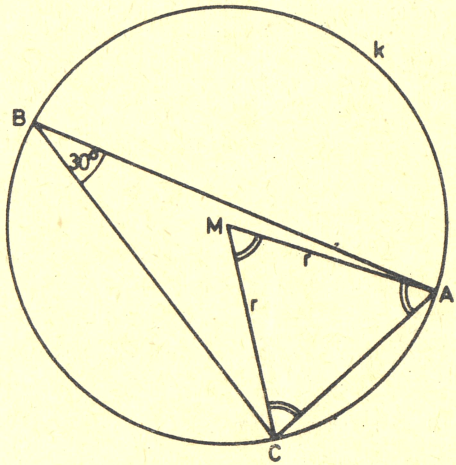

Abb. L 831

170832) Lösung: 8 Punkte

I). Es sei P ein Punkt, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht (Abb. L 832).

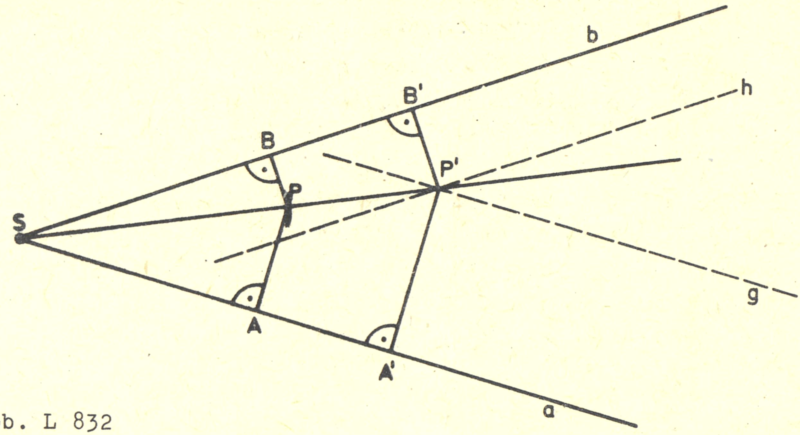

Abb. L 832

Die Fußpunkte[1] der Lote von P auf a bzw. b seien A bzw. B. Dann gilt $\overline{PA} = 2\ \overline{PB}$, d. h. $\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 1$.

Ist h eine beliebige Parallele zu b auf der Seite von b, auf der a liegt, so schneidet sie den Strahl aus S durch P in einem Punkt P' (ein Beweis dieser Aussage wird vom Schüler nicht verlangt). Die Fußpunkte[1] der Lote von P' auf a bzw. b seien A' bzw. B'. Nach dem Strahlensatz gilt dann

$\overline{P'A'} : \overline{PA} = \overline{SP'} : \overline{SP}$ und $\overline{P'B'} : \overline{PB} = \overline{SP'} : \overline{SP}$, also

$\overline{P'A'} : \overline{PA} = \overline{P'B'} : \overline{PB}$. Hieraus folgt $\overline{P'A'} : \overline{P'B'} = \overline{PA} : \overline{PB} =$

$= 2 : 1$. Somit hat die Parallele g zu a durch P' doppelt so großen Abstand von a wie h von b. Diese Parallele g liegt auf der Seite von a, auf der b liegt.

II). Deshalb entspricht ein Punkt P nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

1. Man zieht eine beliebige Parallele h zu b auf der Seite von b, auf der a liegt.
2. Man konstruiert in doppelt so großem Abstand von a, wie ihn h von b hat, die Parallele g zu a auf der Seite von a, auf der b liegt.

   Schneiden sich g und h im Innern des gegebenen Winkels, so sei der Schnittpunkt P' genannt.
3. Um S beschreibt man einen Kreis mit einem Radius von 5,0 cm. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Strahl aus S durch P' sei P genannt.

III). Beweis, daß jeder so konstruierte Punkt P den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Die Fußpunkte der Lote von P auf a bzw. b seien A bzw. B; die Fußpunkte der Lote von P' auf a bzw. b seien A' bzw. B'.

Nach Konstruktion gilt $\overline{P'A'} : \overline{PB} = \overline{SP'} : \overline{SP}$, also $\overline{P'A'} : \overline{PA} = \overline{P'B'} : \overline{PB}$. Hieraus folgt $\overline{PA} : \overline{PB} = \overline{P'A'} : \overline{P'B'} = 2 : 1$, also ist (1) erfüllt. Nach Konstruktion erfüllt P auch (2). Schließlich liegt P' (nach Konstruktion) und daher auch P im Innern des gegebenen Winkels.

IV). Die Konstruktionsschritte 1., 2. sind eindeutig ausführbar; die Geraden g und h schneiden sich, und zwar im Innern des gegebenen Winkels (ein Beweis dieser Aussage wird vom Schüler nicht verlangt). Hierauf ist auch Konstruktionsschritt 3 eindeutig ausführbar. Daher gibt es genau einen Punkt P, der alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

---

1) Die Existenz der Fußpunkte (auf dem <u>Strahl</u> a bzw. b) folgt aus der Voraussetzung, daß a und b einen spitzen Winkel bilden. Diese Feststellung und ihr Beweis werden vom Schüler nicht verlangt.

<u>170833) Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Angenommen, es gibt eine solche Darstellung; dann lautet sie

$$\frac{9}{91} = \frac{x}{7} - \frac{y}{13},$$

wobei x und y natürliche Zahlen mit $0 < x < 7$ und $0 < y < 13$ sind.

Wegen $91 = 7 \cdot 13$ gilt daher

$$13x - 7y = 9,$$
$$7y = 13x - 9,$$
$$y = \frac{13x - 9}{7}.$$

Wir erhalten für x = 1, 2, 3, 4, 5, 6

x	13x	13x - 9
1	13	4
2	26	17
3	39	30
4	52	43
5	65	56
6	78	69

Von den in der dritten Spalte angegebenen Zahlen ist nur die Zahl 56 durch 7 teilbar. Wir erhalten also nur für x = 5 einen ganzzahligen Wert für y, und zwar

$$y = \frac{13x - 9}{7} = \frac{56}{7} = 8.$$

Somit kann nur die Darstellung

$\frac{9}{91} = \frac{5}{7} - \frac{8}{13}$ den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen. Sie erfüllt diese Bedingungen; denn $\frac{5}{7}$ und $\frac{8}{13}$ sind positive echte Brüche, und es gilt $\frac{5}{7} - \frac{8}{13} = \frac{65}{91} - \frac{56}{91} = \frac{9}{91}$.

L 8;II XVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

170834) Lösung: 7 Punkte a) 6 Punkte b) 1 Punkt

a) Die Anzahl der Pioniere, die je genau 13 kg sammelten, sei x. Nach (1) gehören dann genau (x + 1) Pioniere der Brigade A an, das Sammelergebnis dieser Brigade betrug (13x + 6) Kilogramm.

Die Anzahl der Pioniere, die je genau 10 kg sammelten, sei y. Nach (2) gehören dann genau (y + 1) Pioniere der Brigade B an, und das Sammelergebnis dieser Brigade betrug (10y + 5) Kilogramm.

Nach (3) gilt somit $13x + 6 = 10y + 5$,

$$\text{also} \quad y = \frac{13x + 1}{10}, \qquad (*)$$

$13x + 1$ ist durch 10 teilbar, folglich endet die (Zifferndarstellung der) Zahl 13x auf die Ziffer 9 und somit x auf die Ziffer 3.

Aus (4) folgt $100 < 2\,(13x + 6) < 600$

und daraus $44 < 13x < 294$.

Dies wird weder von $x = 3$ noch von Zahlen $x = 23$ erfüllt, da hierfür $13x = 39$ bzw. $13x = 299$ gilt. Also ist $x = 13$. Nach (*) ergibt sich daraus $y = 17$.

Somit gehörten genau 14 Schüler der Brigade A und genau 18 der Brigade B an.

b) Brigade A sammelte $(13 \cdot 13 + 6)$ kg = 175 kg und Brigade B $(17 \cdot 10 + 5)$ kg = 175 kg, die gesamte Gruppe somit 350 kg Altpapier.

Wegen $350 \cdot 0{,}15$ M = 52,50 M konnte die Pioniergruppe genau 52,50 M auf das Solidaritätskonto überweisen.

170835) Lösung: 7 Punkte

Angenommen, es gibt drei derartige Primzahlen. Dann kann wegen $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$ die Primzahl P_1 nur eine der Zahlen 3, 5, 11 sein.

1. Fall: Es sei $P_1 = 3$, dann ist $P_2 + P_3 = 55$. (2)

Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist nur dann ungerade, wenn ein Summand gerade, der andere aber ungerade ist.

Deshalb, wegen $P_2 > P_3$ und weil 2 die einzige gerade Primzahl ist, kann höchstens $P_2 = 53$; $P_3 = 2$ die Lösung von (2) sein. Da diese beiden Zahlen Primzahlen sind, ist das Tripel $[3;\ 53;\ 2]$ eine Lösung.

2. Fall: Es sei $P_1 = 5$, dann ist $P_2 + P_3 = 33$, (3) und analog wie im Fall 1 ist höchstens $P_2 = 31$; $P_3 = 2$ Lösung von (3). Da 31 und 2 Primzahlen sind, ist das Tripel $[5;\ 31;\ 2]$ ebenfalls eine Lösung.

3. Fall: Es sei $P_1 = 11$, dann ist $P_2 + P_3 = 15$, (4) und analog zum Fall 1 ist höchstens $P_2 = 13$; $P_3 = 2$ Lösung von (4). Da 13 und 2 Primzahlen sind, erfüllt auch das Tripel $[11;\ 13;\ 2]$ die Gleichung (1).

Somit sind genau die drei Tripel

$[3;\ 53;\ 2]$, $[5;\ 31;\ 2]$, $[11;\ 13;\ 2]$ Lösung von (1).

170836) Lösung: 7 Punkte

Es seien folgende Bezeichnungen verwendet:

	Eichenplatte	Stahlplatte
Masse	m_E	m_S
Dichte	ϱ_E	ϱ_S
Volumen	V_E	V_S
Inhalt der Dreieckfläche	A_E	A_S
Dicke	h	h

Dann ist

(1) $m_E = A_E \cdot h \cdot \varrho_E$,

(2) $m_S = A_S \cdot h \cdot \varrho_S$

sowie nach Voraussetzung

(3) $\varrho_E = \frac{1}{10} \varrho_S$ und

(4) $A_E = \frac{120}{100} A_S$.

Die Masse der Stahlplatte sei x % der Masse der Eichenplatte. Dann gilt

$$m_S = \frac{x}{100} m_E.$$

L 8;II

Folglich ist wegen (1), ..., (4):

$$x = \frac{m_S}{m_E}100 = \frac{A_S.h.\,\varrho_S.100}{A_E.h.\,\varrho_E} = \frac{A_S.h.\,\varrho_S.100}{\frac{120}{100}.A_S.h.\,\frac{1}{10}\varrho_S} = \frac{10\ 000}{12} = \frac{2500}{3} = 833\,\frac{1}{3}.$$

Die Masse der Stahlplatte ist um $(833\,\frac{1}{3} - 100)\ \% = 733\,\frac{1}{3}\ \%$ größer als die der Eichenplatte.