

XVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 8

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

170821

Vier Schüler, Anja, Birgit, Christoph und Dirk, spielten folgendes Spiel, dessen Regeln ihnen allen bekannt sind:

Einer von ihnen, z. B. Dirk, verläßt das Zimmer. Nun nimmt eine der Personen Anja, Birgit oder Christoph einen vereinbarten Gegenstand, etwa einen Fingerhut, an sich, und Dirk wird wieder hereingerufen. Er erhält dann von den Mitspielern Aussagen mitgeteilt, wobei genau derjenige eine falsche Aussage macht, der den Fingerhut bei sich hat.

Bei einer Durchführung dieses Spiels lauteten die Aussagen:

Anja: Ich habe den Fingerhut nicht, und Christoph hat den Fingerhut.

Birgit: Anja hat den Fingerhut, und ich habe den Fingerhut nicht.

Christoph: Ich habe den Fingerhut nicht.

Untersuche, ob mit Hilfe dieser Aussagen eindeutig feststeht, welcher Spieler den Fingerhut genommen hatte!

Ist dies der Fall, so ermittle diesen Spieler!

170822

Beweise folgenden Satz: Jede Strecke, die zwei Punkte paralleler Seiten eines Parallelogramms miteinander verbindet und durch den Schnittpunkt der Diagonalen geht, wird von diesem Schnittpunkt halbiert.

A 8

170823

Die Abbildung A 823 zeigt einen fünfstrahligen Stern, dessen Spitzen A, B, C, D, E Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks sind.

Ermittle die Größe des Winkels \sphericalangle ADB!

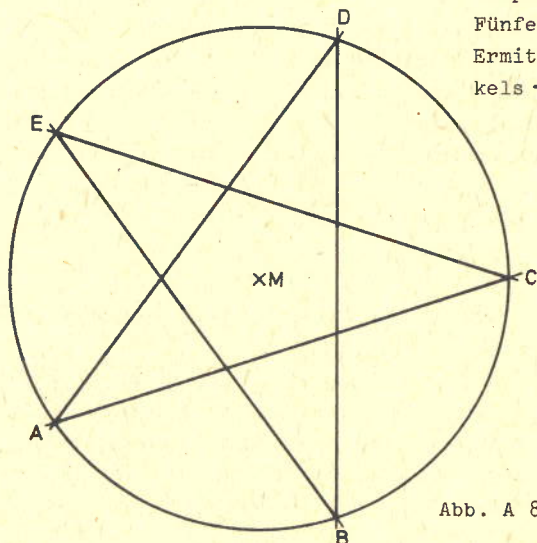


Abb. A 823

170824

Dieter erzählt seinen Klassenkameraden:

"Mein Bruder Fritz ist nur halb so alt wie ich. Wenn man die Anzahl seiner Lebensjahre mit sich selbst multipliziert, erhält man das Alter meines Vaters. Meine Mutter ist drei Jahre jünger als mein Vater. Alle zusammen sind wir 87 Jahre alt."

Ermittle das Alter aller 4 Personen! (Es sind jeweils nur die vollendeten Lebensjahre zu berücksichtigen.)

XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 8

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

170821) Lösung:

8 Punkte

- (1) Angenommen, Christoph hätte den Fingerhut, dann wäre Birgits Aussage falsch, im Widerspruch zu den Spielregeln. Deshalb hat Christoph den Fingerhut nicht.
- (2) Angenommen, Birgit hätte den Fingerhut, dann wäre Anjas Aussage falsch, im Widerspruch zu den Spielregeln. Deshalb hat Birgit den Fingerhut auch nicht.
- (3) Folglich kann höchstens Anja den Fingerhut haben. Tatsächlich ist dann Anjas Aussage falsch, und die Aussagen von Birgit und Christoph sind wahr.
Also steht eindeutig fest, daß Anja den Fingerhut an sich genommen hatte.

170822) Lösung:

10 Punkte

Es seien ABCD ein Parallelogramm, E ein Punkt auf der Seite AB und F ein Punkt auf der Seite CD, und zwar so gelegen, daß die Strecke EF durch den Schnittpunkt S der Diagonalen des Parallelogramms geht.

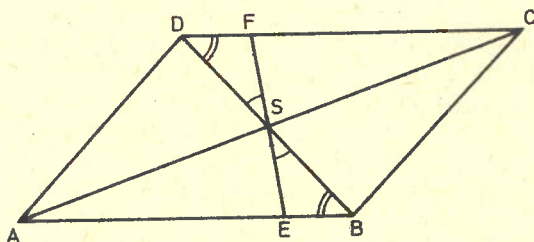


Abb. L 822

L 8

Fällt F mit D zusammen, dann ist FE gleich der Diagonalen BD des Parallelogramms ABCD. Folglich fällt danach auch E mit B zusammen, und es gilt $\overline{BS} = \overline{SD}$, da die Diagonalen im Parallelogramm einander halbieren. Falls $F \neq D$ ist, so ist auch $E \neq B$ (denn aus $E = B$ folgte wie eben auch $F = D$), und es gilt:

$\sphericalangle BSE = \sphericalangle DSF$ als Scheitelwinkel
an geschnittenen Parallelen.
 $\sphericalangle EBS = \sphericalangle FDS$ als Wechselwinkel

Also gilt: $\triangle SEB \cong \triangle SFD$, da diese Dreiecke in einer Seite und beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.

Daraus folgt $\overline{ES} = \overline{SF}$, d. h. die Strecke EF wird durch den Schnittpunkt S der Diagonalen halbiert.

170823) Lösung:

11 Punkte

1. Lösungsweg

Da A, B, C, D, E Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks sind, liegen sie alle auf der Peripherie eines Kreises: dessen Mittelpunkt sei M. Verbindet man M mit den genannten Eckpunkten, so entstehen 5 kongruente Dreiecke AMB, BMC, CMD, DME, EMA. Die Summe ihrer Winkel mit dem Scheitel M bildet einen Vollwinkel, so daß jeder dieser Winkel $360^\circ : 5 = 72^\circ$ beträgt. Da im Kreis jeder Peripheriewinkel halb so groß wie der Zentriwinkel über dem gleichen Bogen ist, gilt

$$\sphericalangle ADB = \frac{1}{2} \quad \sphericalangle AMB = \frac{1}{2} \cdot 72^\circ = 36^\circ.$$

2. Lösungsweg

Das Fünfeck ABCDE kann in 3 Dreiecke ADE, ADB, BCD zerlegt werden. Die Innenwinkelsumme dieser drei Dreiecke ist gleich der Innenwinkelsumme des Fünfecks, also $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$.

Jeder Innenwinkel des regelmäßigen Fünfecks beträgt somit $540^\circ : 5 = 108^\circ$. Da das Dreieck AED gleichschenkelig ist ($\overline{AE} = \overline{ED}$) und $\sphericalangle AED = 108^\circ$ beträgt, gilt $\sphericalangle ADE = 36^\circ$ (Basiswinkel).

Nun ist $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BDC$ und $\sphericalangle EDC = 108^\circ$, also

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle EDC - \sphericalangle ADE - \sphericalangle BDE,$$

$$\sphericalangle ADB = 108^\circ - 36^\circ - 36^\circ,$$

$$\sphericalangle ADB = 36^\circ.$$

L 8

170824) Lösung:

11 Punkte

Das Alter des Vaters ist eine Quadratzahl kleiner 45, da das Alter von Vater und Mutter zusammen nicht 87 Jahre oder mehr betragen kann. Da der Vater die älteste der vier Personen ist, beträgt sein Alter mindestens ein Viertel von 87 Jahren, also ist es größer als 21.

Zwischen 21 und 45 liegen genau die Quadratzahlen 25 und 36.

Fall 1: Angenommen, das Alter des Vaters wäre 25 Jahre.

Dann wären Fritz 5 Jahre, Dieter 10 Jahre und die Mutter 22 Jahre. Das Alter aller Familienangehörigen zusammen betrüge in diesem Fall nicht 87 Jahre. Also ist der Vater nicht 25 Jahre alt.

Fall 2: Angenommen, das Alter des Vaters beträgt 36 Jahre.

Dann ist Fritz 6 Jahre, Dieter 12 Jahre und die Mutter 33 Jahre alt.

Alle zusammen sind wegen $36 + 6 + 12 + 33 = 87$ mithin 87 Jahre, wie es verlangt war.

Folglich treffen diese Altersangaben als einzige zu.

2. Lösungsweg

Dieter sei

x Jahre alt.

Dann ist Fritz

$\frac{1}{2}x$ "

der Vater

$\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}x$ Jahre = $\frac{1}{4}x^2$ "

die Mutter

$\frac{1}{4}x^2 - 3$ Jahre alt.

Nach Aufgabenstellung gilt nun

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^2 - 3 = 87.$$

also $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x = 90$

bzw. $x^2 + 3x = 180$, also

$$x(x + 3) = 180.$$

Nun läßt sich wegen $180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ die Zahl 180 genau folgendermaßen in zwei Faktoren zerlegen:

$$180 = 1 \cdot 180 = 2 \cdot 90 = 3 \cdot 60 = 4 \cdot 45 = 5 \cdot 36 = 6 \cdot 30 = 9 \cdot 20 = 10 \cdot 18 = 12 \cdot 15.$$

Von diesen Zerlegungen entspricht genau $180 = 12 \cdot 15$ der Bedingung, daß einer der beiden Faktoren um 3 größer ist als der andere.

L 8

Somit sind: Dieter	12 Jahre,
Fritz	6 " ,
der Vater	36 " ,
<u>die Mutter</u>	<u>33 " ,</u>
alle zusammen	87 Jahre alt.