XVII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 7 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

170731

Es sei A die Menge aller derjenigen natürlichen Zahlen a, für die

$$1500 \leq a \leq 2650$$ gilt.

Untersuche, ob es in der Menge A fünfundsechzig verschiedene Zahlen gibt, die gerade und durch 9 teilbar sind!

170732

Uli hat vier verschiedene, mit A, B, C und D bezeichnete Sorten Stahlkugeln. Dabei haben Kugeln gleicher Sorte auch stets einander gleiches Gewicht. Mit Hilfe einer Balkenwaage stellt er fest, daß zwei Kugeln der Sorte B genau so schwer sind wie eine Kugel der Sorte A. Drei Kugeln der Sorte C wiegen ebensoviel wie eine Kugel der Sorte B. Fünf Kugeln der Sorte D haben das gleiche Gewicht wie eine Kugel der Sorte C.

a) Wieviel Kugeln der Sorte D muß Uli in die (leere) eine Waagschale legen, wenn sie einer Kugel der Sorte A in der anderen Waagschale das Gleichgewicht halten sollen?

b) In der einen Waagschale liegen 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C. Wieviel Kugeln der Sorte B muß Uli in die andere (leere) Waagschale legen, um Gleichgewicht zu erhalten?

170733

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\overline{AC} = 9{,}0$ cm; $\overline{BC} = 6{,}0$ cm und $\sphericalangle BCA = 120^\circ$.

Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck C D E F G H, derart, daß D auf AC, F auf AB und H auf BC liegen!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob es genau ein Sechseck C D E F G H gibt, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht!

Krüger

A 7;II

XVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

170734

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. Auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege der Punkt D so, daß $\overline{BD} = \overline{AB}$ ist. Beweise, daß dann $\sphericalangle DCA = 90^\circ$ ist!

170735

Ermittle alle zweistelligen Zahlen, für die sowohl die folgende Aussage (1) als auch die folgende Aussage (2) zutrifft:

(1) Setzt man zwischen Einerziffer und Zehnerziffer der zweistelligen Zahl die Ziffer 5, so erhält man eine Zahl, die um genau 230 größer ist als die ursprüngliche Zahl.

(2) Setzt man die Ziffer 5 vor die zweistellige Zahl, so erhält man ein ganzzahliges Vielfaches der ursprünglichen Zahl.

170736

In einem Quadrat ABCD habe die Diagonale AC eine Länge von 10,0 cm.

a) Konstruiere ein solches Quadrat! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

b) Ein Rechteck EFGH heißt dann dem Quadrat ABCD einbeschrieben, wenn bei geeigneter Bezeichnung E auf AB, F auf BC, G auf CD und H auf DA liegt. Dabei gilt EF $\parallel$ AC. Ermittle für jedes derartige Rechteck EFGH seinen Umfang!

XVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

170731) Lösung: 5 Punkte

Alle Zahlen, die durch 2 und durch 9 teilbar sind, sind auch durch $2 \cdot 9 = 18$ teilbar, da 2 und 9 teilerfremd sind. Die kleinste durch 18 teilbare Zahl in der Menge A ist 1512, die nächstgrößere erhält man durch Addition von 18, da es unter 18 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen nur eine durch 18 teilbare gibt. Dieses Verfahren läßt sich fortsetzen. Die vierundsechzigste dabei erhaltene Zahl (einschließlich der Zahl 1512 also insgesamt die fünfundsechzigste gewonnene Zahl) lautet $1512 + 64 \cdot 18 = 1512 + 1152 = 2664$. Da sie größer als 2650 ist, gibt es folglich in der Menge A nicht fünfundsechzig verschiedene durch 9 teilbare gerade Zahlen.

Hinweis zur Korrektur: Die Angabe der kleinsten durch 18 teilbaren Zahl k in A wird nicht verlangt; zu einer Lösung der Aufgabe führt auch die Feststellung, daß die vierundsechzigste nach dem beschriebenen Verfahren erhaltene Zahl oberhalb k größer oder gleich $1500 + 64 \cdot 18$ und daher größer als 2650 ist.

170732) Lösung: 7 Punkte a) 4 Punkte b) 3 Punkte

a) Das Gewicht einer Kugel der Sorte A ist gleich dem doppelten Gewicht einer Kugel der Sorte B. Eine Kugel der Sorte B hat das dreifache Gewicht einer Kugel der Sorte C, folglich hat eine Kugel der Sorte A das gleiche Gewicht wie 6 Kugeln der Sorte C. Eine Kugel der Sorte C hat das fünffache Gewicht einer Kugel der Sorte D, das Gewicht von 6 Kugeln der Sorte C ist daher gleich dem Gewicht von 30 Kugeln der Sorte D.

Daraus ergibt sich, daß Uli 30 Kugeln der Sorte D in die eine Waagschale legen muß, wenn Gleichgewicht erreicht werden soll.

b) Das Gewicht von 5 Kugeln der Sorte D ist gleich dem Gewicht einer Kugel der Sorte C, daher haben 20 Kugeln der Sorte D das gleiche Gewicht wie 4 Kugeln der Sorte C. Das Gewicht von 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C ist mithin gleich dem Gewicht von 9 Kugeln der Sorte C.
Da drei Kugeln der Sorte C soviel wiegen wie eine Kugel der Sorte B, wiegen folglich 9 Kugeln der Sorte C soviel wie 3 Kugeln der Sorte B.
Uli muß also 3 Kugeln der Sorte B in die andere Waagschale legen, wenn sie 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C das Gleichgewicht halten sollen.

170733) Lösung: 7 Punkte

(I) Angenommen, ein Sechseck C D E F G H erfülle die Bedingungen der Aufgabe. Dann halbiert der Mittelpunkt M des Umkreises des Sechsecks C D E F G H die Halbierende des Winkels ∢ B C A, und die Dreiecke M C D, M D E, M E F, M F G, M G H und M H C sind sämtlich gleichseitig mit der Seitenlänge $\overline{CM}$.

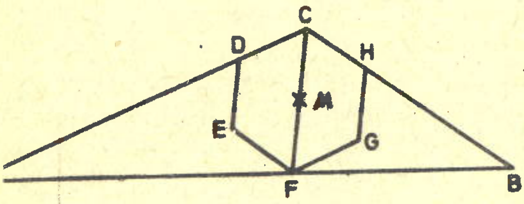

Abb. L 733 a

(II) Daher entspricht ein Sechseck C D E F G H nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert die Halbierende des Winkels ∢ BCA, ihr Schnittpunkt mit AB sei Punkt F.

(2) Man halbiert CF, der Halbierungspunkt sei M.

(3) Man beschreibt um C den Kreis mit dem Radius $\overline{MC}$, **seine** Schnittpunkte mit AC bzw. BC seien D bzw. H genannt.

(4) Man beschreibt um M und F Kreise mit dem Radius $\overline{MC}$, ihre Schnittpunkte miteinander seien E und G genannt.

(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Sechseck C D E F G H den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion liegen die Punkte D, F, H in dieser Reihenfolge auf den Seiten AC, AB, BC. Ebenfalls nach Konstruktion ist $\overline{CD} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{HC} = \overline{CM}$.
Da ferner nach Konstruktion M auf der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle$ DCH der Größe 120° liegt, $\triangle$ CDM also gleichseitig ist, und da nach Konstruktion $\triangle$ EFM ebenfalls gleichseitig ist, gilt $\overline{\sphericalangle\ CMD} = \overline{\sphericalangle\ FME} = 60^\circ$.
Hiernach und wegen $\overline{\sphericalangle\ FMC} = 180^\circ$ ist $\overline{\sphericalangle\ EMD} = 60^\circ$. Da das Dreieck EMD wegen $\overline{MD} = \overline{ME}$ gleichschenklig ist, gilt $\overline{\sphericalangle\ MED} = \overline{\sphericalangle\ MDE}$, diese Winkelgröße beträgt somit jeweils 60°, also ist $\overline{DE} = \overline{CM}$. Entsprechend ist $\overline{GH} = \overline{CM}$. Wegen $\overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HC} = \overline{CM}$ sind die Dreiecke MCD, MDE, MEF, MFG, MGH und MHC sämtlich gleichseitig, und die Winkel $\sphericalangle$ CDE, $\sphericalangle$ DEF, $\sphericalangle$ EFG, $\sphericalangle$ FGH und $\sphericalangle$ GHC haben sämtlich die Größe 120°.

(IV) Sämtliche Konstruktionsschritte sind eindeutig ausführbar, deshalb gibt es stets genau ein Sechseck C D E F G H, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Bemerkung: Auf den Nachweis, daß $\overline{CM} < \overline{BC}$ und $\overline{CM} < \overline{AC}$ ist, soll hier verzichtet werden.

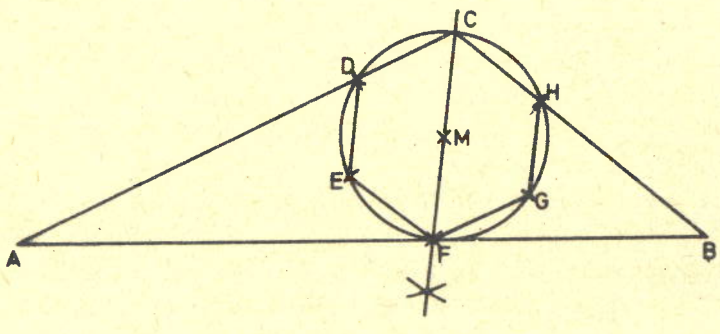

Abb. L 733 b

XVII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

170734) Lösung: 6 Punkte

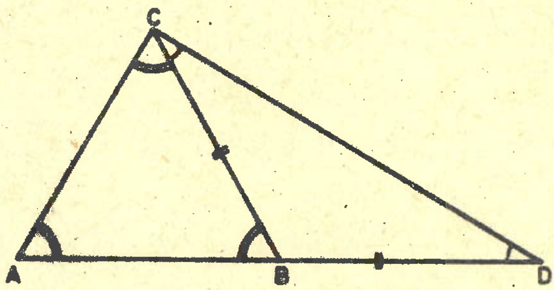

Abb. L 734

Nach Voraussetzung gilt $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$ und damit

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = \sphericalangle CAB = 60^\circ.$$

Der Außenwinkel $\sphericalangle$ CBD des Dreiecks ABC beträgt somit nach dem Außenwinkelsatz 120°.

Wegen $\overline{BC} = \overline{BD}$ ist $\triangle BDC$ gleichschenklig mit der Spitze in B. Daher sowie wegen des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck ist

$$\sphericalangle DCB = \sphericalangle BDC = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ.$$

Daraus folgt, daß $\sphericalangle DCA = \sphericalangle BCA + \sphericalangle DCB = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ ist, w.z.b.w.

Hinweis zur Korrektur: Bearbeitet ein Schüler die Aufgabe durch Zitieren des Satzes von Thales, so gilt dies als zulässiger Lösungsweg.

170735) Lösung: 7 Punkte

Angenommen, eine zweistellige Zahl erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Dann ist sie mindestens 10 und höchstens 99; folglich entsteht nach Vergrößerung um 230 eine Zahl, die mindestens 240 ~~und höchstens 329 ist. Von diesen Zahlen haben~~ nur 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258 und 259 eine 5 als Zehnerziffer.

Folglich können höchstens die Zahlen 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 die Bedingung (1) erfüllen. Sie erfüllen diese Bedingung, da durch das in (1) genannte Einfügen der Ziffer 5 die Zehnerziffer 2 durch die Ziffernfolge 25 ersetzt wird, wobei sich die Zahlen jeweils um 230 vergrößern.
Setzt man vor jede von ihnen die Ziffer 5, so erhält man die Zahlen 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528 und 529.
Diese sind jeweils um 500 größer als die ursprüngliche Zahl. Daher ist eine so gebildete Zahl genau dann ein ganzzahliges Vielfaches der ursprünglichen Zahl, wenn auch 500 ein ganzzahliges Vielfaches von ihr ist. Das trifft unter den Zahlen, die (1) erfüllen, genau für die Zahlen 20 und 25 zu. Daher sind dies alle zweistelligen Zahlen, die beide Bedingungen erfüllen.

170736) Lösung: 8 Punkte a) 3 Punkte b) 5 Punkte

a) Da in jedem Quadrat die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, einander gleich lang sind und einander halbieren, liegen die Eckpunkte B und D erstens auf der Mittelsenkrechten von AC und zweitens auf dem Kreis mit dem Radius $\frac{\overline{AC}}{2}$ um den Mittelpunkt von AC.

Daher entspricht ein Quadrat ABCD nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

1. Wir zeichnen eine Strecke AC der Länge $\overline{AC}$ = 10,0 cm und konstruieren ihre Mittelsenkrechte.
2. Wir beschreiben um den Mittelpunkt M der Strecke AC den Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}\,\overline{AC}$.
3. Schneidet der Kreis die Mittelsenkrechte in zwei Punkten, so seien diese B bzw. D genannt.

ABCD ist das gesuchte Quadrat.

Beweis: Laut Konstruktion gilt BD $\perp$ AC. Ferner gilt laut Konstruktion $\overline{AM} = \overline{CM} = \overline{BM} = \overline{DM}$.

Folglich sind nach dem Kongruenzsatz (s, w, s) die Dreiecke AMB, BMC, CMD und DMA zueinander kongruent. Also gilt: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$. Da die erwähnten Dreiecke ferner rechtwinklig-gleichschenklig mit der Spitze in M sind, sind ihre Basiswinkel je 45° groß. Da schließlich jeder der Winkel $\sphericalangle$ ABC, $\sphericalangle$ BCD, $\sphericalangle$ CDA, $\sphericalangle$ DAB gleich der Summe zweier dieser Basiswinkel ist, hat jeder von ihnen die Größe 90°. Folglich ist ABCD ein Quadrat, und es hat die vorgeschriebene Diagonalenlänge.

b) Dem Quadrat ABCD sei ein Rechteck EFGH so einbeschrieben, wie es in der Aufgabenstellung angegeben ist.

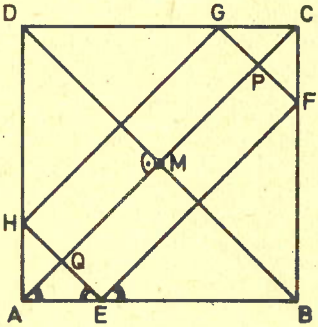

Abb. L 736

FG schneide die Diagonale AC in P und HE die Diagonale AC in Q (Vgl. Abb. L 736).
Da die Diagonale eines Quadrates als Symmetrieachse die Innenwinkel halbiert, gilt $\sphericalangle\,\overline{CAB} = 45^\circ$. Wegen EF $\parallel$ AC folgt $\sphericalangle\,\overline{CAB} = \sphericalangle\,\overline{FEB} = 45^\circ$ als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und wegen $\sphericalangle\,\overline{FEH} = 90^\circ$ folgt $\sphericalangle\,\overline{HEA} = 45^\circ$. Somit ist das Dreieck AEQ wegen der gleichgroßen Basiswinkel gleichschenklig, und es gilt $\overline{AQ} = \overline{QE}$.

Analog gilt $\overline{AQ} = \overline{HQ}$, also $\overline{EH} = 2\overline{AQ}$. Entsprechend folgt $\overline{FG} = 2\overline{CP}$. Wegen $\overline{EH} = \overline{FG}$ folgt hieraus $\overline{AQ} = \overline{CP}$. Schließlihh gilt wegen EF $\parallel$ QP und EQ $\parallel$ FP auch $\overline{EF} = \overline{QP}$.

Für den Umfang u des Rechtecks EFGH gilt folglich:

$u = 2(\overline{EF} + \overline{EH}) = 2(\overline{QP} + \overline{AQ} + \overline{CP}) = 2\,\overline{AC}$.

Der Umfang jedes derartigen Rechtecks EFGH beträgt somit 20,0 cm.