A 11/12;I XVI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>161241</u>

Es seien a, b, x_0 drei reelle Zahlen mit $a < x_0 < b$; das Intervall aller x mit $a < x < b$ sei I genannt. Eine in I definierte Funktion f sei an der Stelle x_0 differenzierbar. Ferner sei g die in I durch $g(x) = |f(x)|$ definierte Funktion.
Unter diesen Voraussetzungen beweise man: Genau dann ist g an der Stelle x_0 nicht differenzierbar, wenn $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) \neq 0$ gilt.

<u>161242</u>

Gegeben sei eine natürliche Zahl $n \geq 1$. Man ermittle die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, $2n$ rote, $2n$ grüne und $2n$ schwarze Kugeln so auf zwei Gefäße Q_1 und Q_2 zu verteilen, daß jedes der Gefäße $3n$ Kugeln enthält.

<u>Hinweis:</u>
Zwei Verteilungsmöglichkeiten gelten genau dann als gleich, wenn für jede der drei Farben die Anzahl der in Q_1 enthaltenen Kugeln dieser Farbe bei beiden Verteilungsmöglichkeiten übereinstimmt (und folglich dasselbe auch für Q_2 zutrifft).

16.1242 Die Bezeichnungen Q_1, Q_2 für die Gefäße seien vor der Verteilung der Kugeln festgelegt.

A 11/12;I

161243

Ist $P_1P_2P_3P_4$ S eine vierseitige Pyramide mit S als Spitze und einem konvexen Viereck $P_1P_2P_3P_4$ als Grundfläche, so seien die Seitenflächen SP_iP_{i+1} mit ε_i und die Größe des Winkels zwischen ε_{i-1} und ε_i mit α_i bezeichnet (i = 1, 2, 3, 4; tritt in den Formeln ein Index 5 auf, so werde er durch den Index 1 ersetzt; tritt ein Index 0 auf, so werde er durch 4 ersetzt).

Man beweise: Wenn zu einer solchen Pyramide ein gerader Kreiskegel mit der Spitze S existiert, auf dessen Mantel P_1,P_2, P_3 und P_4 liegen, so gilt $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4$.

A 11/12;II XVI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

161244

Man beweise, daß für alle reellen Zahlen a und b

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \qquad (1)$$ gilt.

161245

Man ermittle die Anzahl aller Paare (p,q) natürlicher Zahlen mit $1 \leq p \leq 100$ und $1 \leq q \leq 100$ und der Eigenschaft, daß die Gleichung

$$x^5 + px + q = 0$$

mindestens eine rationale Lösung hat.

Von den nachstehenden Aufgaben 1246 A und 1246 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

161246 A

Es sind alle Polynome

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

mit reellen Koeffizienten a_0, a_1, ..., a_n anzugeben, die die folgende Eigenschaft haben:

Für alle reellen Zahlen x gilt

$$x\, f(x-1) = (x-2)\, f(x).$$

161246 B

Man gebe für jede natürliche Zahl $n \geq 5$ eine Zerlegung eines regelmäßigen, konvexen n-Ecks in eine minimale Anzahl von

a) sämtlich spitzwinkligen Dreiecken,

b) sämtlich stumpfwinkligen Dreiecken an.

3o o6 31-1/1ooo/77 (2o4)

A 11/12;II

Hinweis:

Unter einer Zerlegung in Dreiecke wird eine Zerlegung des n-Ecks verstanden, bei der jede Seite eines Zerlegungsdreiecks entweder gleichzeitig Seite eines anderen Zerlegungsdreiecks oder eine der Seiten des n-Ecks ist.

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

161241) Lösung: 6 Punkte

Der geforderte Beweis ist erbracht, wenn die folgenden drei Aussagen gezeigt sind:

(1) Ist $f(x_0) \neq 0$, so ist g an der Stelle x_0 differenzierbar.

(2) Ist $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) = 0$, so ist g an der Stelle x_0 differenzierbar.

(3) Ist $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) \neq 0$, so ist g an der Stelle x_0 nicht differenzierbar.

Zu (1): Ist $f(x_0) > 0$, so existiert wegen der (aus der Differenzierbarkeit folgenden) Stetigkeit von f an der Stelle x_0 eine Umgebung von x_0, in der $f(x) > 0$ ist. In dieser Umgebung (einschließlich x_0) gilt somit $g(x) = f(x)$, also ist g ebenso wie f an der Stelle x_0 differenzierbar.

Ist $f(x_0) < 0$, so existiert entsprechend eine Umgebung von x_0, in der $g(x) = - f(x)$ gilt, woraus wieder die Behauptung folgt.

Zu (2): Wegen $f'(x_0) = 0$, also $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x-x_0} = 0$, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung von x_0, in der (für $x \neq x_0$) $\left|\frac{f(x)}{x-x_0}\right| < \varepsilon$ gilt.
Daher und wegen $\left|\frac{g(x)}{x-x_0}\right| = \left|\frac{f(x)}{x-x_0}\right|$ hat auch g an der Stelle x_0 die Ableitung 0.

Zu (3) zeigen wir die äquivalente Aussage

(3') Ist $f(x_0) = 0$ und g an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist $f'(x_0) = 0$:

Nach Voraussetzung existiert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{x-x_0}$. Da für alle $x > x_0$ aus I nun $\frac{g(x)}{x-x_0} \geq 0$ gilt, folgt $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{x-x_0} \geq 0$, da für alle $x < x_0$ aus I aber $\frac{g(x)}{x-x_0} \leq 0$ gilt, folgt $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{x-x_0} \leq 0$.

Hieraus ergibt sich entsprechend wie in (2) wegen
$\left|\frac{f(x)}{x-x_0}\right| = \left|\frac{g(x)}{x-x_0}\right|$ auch $f'(x_0) = 0$.

161242) Lösung: 6 Punkte

Man ordne jeder Verteilungsmöglichkeit das Tripel (x_1, x_2, x_3) aus den Anzahlen der roten, grünen bzw. schwarzen Kugeln in Q_1 zu. Hiernach sind zwei Verteilungsmöglichkeiten genau einander gleich, wenn ihre zugeordneten Tripel einander gleich sind. Ferner ist ein Tripel (x_1, x_2, x_3) ganzer Zahlen genau dann einer Verteilungsmöglichkeit zugeordnet, wenn

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = 3n \\ &0 \leqq x_1, x_2, x_3 \leqq 2n \end{aligned} \qquad (1)$$

gilt. Daher ist die gesuchte Anzahl gleich der Anzahl A_n aller Tripel (x_1, x_2, x_3) ganzer Zahlen, die (1) genügen.

Es werden nun drei Fälle unterschieden:

1. Fall: Es sei $x_1 = n$. Dann ist (1) äquivalent mit

$x_2 + x_3 = 2n$; $0 \leqq x_2, x_3 \leqq 2n$ und dies mit $x_3 = 2n - x_2$,
$0 \leqq x_2 \leqq 2n$ (2), $0 \leqq 2n - x_2 \leqq 2n$. (3)

Da (2) und (3) zueinander äquivalent sind, existiert zu jedem x_2 mit (2) genau ein Tripel (des vorliegenden Falles $x_1 = n$). Deren Anzahl ist also $2n + 1$.

2. Fall: Es sei $x_1 = n - a$ mit $a > 0$; gemäß (1) kommen hierfür genau alle natürlichen Zahlen a mit $1 \leqq a \leqq n$ in Betracht. Dann ist (1) äquivalent mit

$x_2 + x_3 = 2n + a$; $0 \leqq x_2, x_3 \leqq 2n$ und dies mit
$x_3 = 2n + a - x_2$, $0 \leqq x_2 \leqq 2n$, $0 \leqq 2n + a - x_2 \leqq 2n$.

Die hier auftretenden Ungleichungen sind äquivalent mit

$a \leqq x_2 \leqq 2n$. (4)

Also existiert zu jedem x_2 mit (4) genau ein Tripel (mit $x_1 = n - a$). Deren Anzahl ist also $2n + 1 - a$.

3. Fall: Es sei $x_1 = n + a$ mit $a > 0$; gemäß (1) kommen hierfür genau alle natürlichen Zahlen a mit $1 \leqq a \leqq n$ in Betracht.
Dann ist (1) äquivalent mit

$x_2 + x_3 = 2n - a;\quad 0 \leqq x_2,\ \ x_3 \leqq 2n$ und dies mit

$x_3 = 2n - a - x_2,\ 0 \leqq x_2 \leqq 2n,\ \ 0 \leqq 2n - a - x_2 \leqq 2n.$

Die hier auftretenden Ungleichungen sind äquivalent mit

$0 \leqq x_2 \leqq 2n - a.\quad (5)$

Also existiert zu jedem x_2 mit (5) genau ein Tripel (mit $x_1 = n+a$). Deren Anzahl ist also $2n + 1 - a$.

Da die betrachteten Fälle alle Möglichkeiten enthalten und einander ausschließen, ergibt sich für die Gesamtzahl A_n:

$$A_n = 2n + 1 + 2\sum_{a=1}^{n} (2n + 1 - a) = 2n + 1 + 2n(2n + 1) - 2\cdot \frac{n(n+1)}{2} =$$
$$= 3n^2 + 3n + 1.$$

161243) Lösung: 8 Punkte

Eine senkrecht zur Achse g des Kegels verlaufende Ebene ε, die seinen Mantel in einem Kreis k schneidet, wird von den Strahlen aus S durch $P_1, \ldots, P_4$ in Punkten geschnitten, die entsprechend $Q_1, \ldots, Q_4$ genannt seien; von g wird sie im Mittelpunkt G des Kreises k geschnitten. Bezeichnet man die Fläche $SQ_i\,Q_{i+1}$ mit η_i, so ist α_i die Größe des Winkels zwischen η_{i-1} und η_i. Ferner sei die Fläche SGQ_i mit ϑ_i bezeichnet und die Größe des Winkels zwischen η_{i-1} und ϑ_i mit β_i sowie die Größe des Winkels zwischen ϑ_i und η_i mit γ_i. Die Flächen $\eta_{i-1}, \vartheta_i, \eta_i$ haben die gemeinsame Randstrecke SQ_i.

1. Fall: G gehört der Vierecksfläche an (Abb. 1243a, von den Flächen η_i, ϑ_i wurden nur die in ε liegenden Randstrecken gezeichnet; die eingezeichneten Winkelangaben $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ geben nicht die wahren Größen an).
Dann gilt für $i = 1, \ldots, 4$: Die Fläche ϑ_i liegt in dem Winkel zwischen η_{i-1} und η_i, also gilt

$\alpha_i = \beta_i + \gamma_i \quad (i = 1, \ldots, 4).$

<u>2. Fall:</u> G gehört der Vierecksfläche nicht an (Abb. L 1243b).
Da G als Mittelpunkt des Umkreises von $Q_1Q_2Q_3Q_4$ nicht im Scheitelwinkel eines Innenwinkels von $Q_1Q_2Q_3Q_4$ liegen kann, gibt es einen Index J so, daß G in Außenwinkeln bei Q_J und Q_{J+1} liegt.
Durch zyklische Vertauschung der Indizes, die weder die Voraussetzungen noch die Behauptung $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4$ ändert, sei etwa $J = 1$ erreicht.
Dann liegt η_1 in dem Winkel zwischen η_4 und ϑ_1, also ist

$$\alpha_1 = \beta_1 - \gamma_1. \qquad (2)$$

Ferner liegt η_1 in dem Winkel zwischen ϑ_2 und η_2, also ist

$$\alpha_2 = \gamma_2 - \beta_2. \qquad (3)$$

Für $i = 3,4$ liegt ϑ_i in dem Winkel zwischen η_{i-1} und η_i, also ist

$$\alpha_3 = \beta_3 + \gamma_3, \qquad (4)$$

$$\alpha_4 = \beta_4 + \gamma_4. \qquad (5)$$

In beiden Fällen gilt für alle $i = 1, \ldots, 4$: Ist M_i der Mittelpunkt der Strecke Q_iQ_{i+1}, so ist die Gerade durch G und M_i für das gleichschenklige Dreieck $GQ_i\,Q_{i+1}$ eine Mittelsenkrechte. Hieraus und aus $g \perp \varepsilon$ folgt: Q_i geht bei Spiegelung an der Ebene durch G, M_i, S in Q_{i+1} über. Bei dieser Spiegelung geht daher ϑ_i in ϑ_{i+1} über, während η_i in sich übergeht. Hiernach gilt

$$\gamma_i = \beta_{i+1} \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \qquad (6)$$

Sowohl aus (1), (6) als auch aus (2), ..., (6) folgt die Behauptung $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4$.

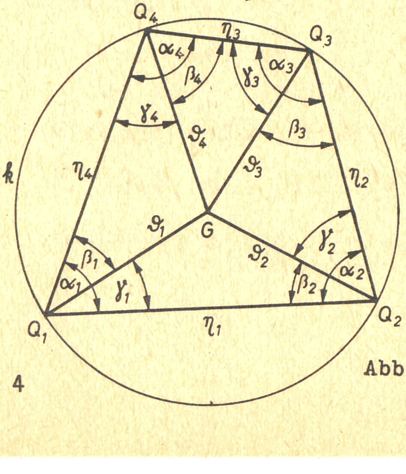

Abb. 1243 a

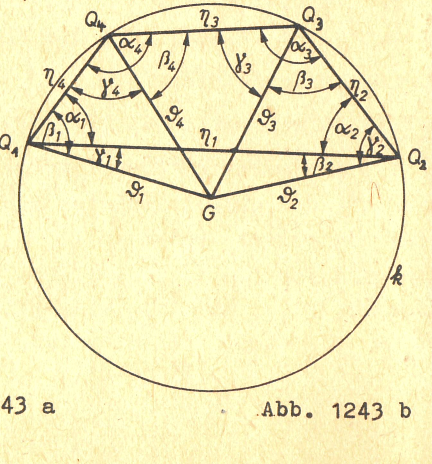

Abb. 1243 b

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

161244) Lösung: 5 Punkte

Die Ungleichung (1) ist wegen $1 + |a+b| > 0$, $1 + |a| > 0$, $1 + |b| > 0$ für alle reellen Zahlen a, b erfüllt, wenn die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$|a+b| \cdot (1+|a|)(1+|b|) \leqq |a| \cdot (1+|a+b|)(1+|b|) + |b| \cdot (1+|a+b|)(1+|a|), \quad (2)$$

$$|a+b| + |a| \cdot |a+b| + |b| \cdot |a+b| + |a| \cdot |b| \cdot |a+b|$$
$$\leqq |a| + |b| + |a| \cdot |a+b| + |b| \cdot |a+b| + 2 \cdot |a| \cdot |b| + 2 \cdot |a| \cdot |b| \cdot |a+b|, \quad (3)$$

$$|a+b| \leqq |a| + |b| + |a| \cdot |b| \cdot |a+b|. \quad (4)$$

Nun ist für alle reellen Zahlen a und b die Ungleichung

$$|a+b| \leqq |a| + |b| \leqq |a| + |b| + |a| \cdot |b| \cdot |a+b|, \quad (5)$$

erfüllt,
also auch die Ungleichung (4) und daher die Ungleichungen (3), (2) und (1), w.z.b.w.

161245) Lösung: 7 Punkte

I. Angenommen, für ein Paar (p,q) natürlicher Zahlen mit $1 \leqq p \leqq 100$ und $1 \leqq q \leqq 100$ sei x eine rationale Lösung der Gleichung $f(x) = x^5 + px + q = 0$. (1)

Dann ist $x = \frac{u}{v}$, wobei u und v ganze Zahlen mit $v > 0$ und $(u,v) = 1$ sind.

Aus (1) folgt somit

$u^5 + puv^4 + qv^5 = 0$.

Hätte nun v eine Primzahl t als Teiler, so wäre hiernach t auch Teiler von u^5, also von u und damit von (u,v), im Widerspruch zu $(u,v) = 1$. Also ist $v = 1$, $x = u$ ganzzahlig.

Wäre $x \geqq 0$, so folgte aus $p,q > 0$ auch $f(x) > 0$ im Widerspruch gegen $f(x) = 0$. Also ist $x < 0$.

3o o6 31-1/1ooo/77 (2o4)

1. Ist $x = -1$, so gilt

   $0 = f(-1) = -1 - p+q$, also $q = p + 1 \leqq 100$, also $p \leqq 99$.

2. Ist $x = -2$, so gilt

   $0 = f(-2) = -32 - 2p+q$, also $q = 2p + 32 \leqq 100$, also $p \leqq 34$.

3. Wäre $x \leqq -3$, so wäre

   $f(x) \leqq -243 - 3p+q \leqq -243 - 3 + 100 = - 146 < 0$ im Widerspruch gegen $f(x) = 0$.

Daher können nur die Paare

$$(p,\ p+1) \qquad (p = 1, \ldots, 99),$$
$$(p,\ 2p+32) \qquad (p = 1, \ldots, 34)$$

die geforderten Eigenschaften haben.

II. Sie haben diese Eigenschaften; denn sie lauten (p, q) mit natürlichen Zahlen p, q, für die $1 \leqq p \leqq 100$, $1 \leqq q = p + 1 \leqq 99 + 1$ bzw. $1 \leqq q = 2p + 32 \leqq 2\cdot 34 + 32$ gilt, und die Gleichung $x^5 + px + p + 1 = 0$ hat die rationale Zahl $x = -1$ als Lösung, die Gleichung $x^5 + px + 2p + 32 = 0$ hat die rationale Zahl $x = -2$ als Lösung.

III. Für jede natürliche Zahl p ist $p + 1 < 2p + 32$. Daher sind die in I. genannten Paare sämtlich verschieden; ihre Anzahl beträgt somit

$$99 + 34 = 133.$$

<u>161246 A) Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

Es sei $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ ein solches Polynom; dann gilt für alle reellen x

$$x\, f(x-1) = (x-2)\, f(x).$$

Daraus folgt für alle $x \neq 2$

$$f(x) = \frac{x}{x-2}\, f(x-1). \qquad (1)$$

Setzt man

$f(2) = c$, so folgt aus (1)

$f(3) = 3c$,

$f(4) = \frac{4 \cdot 3}{2}\, c$

und, wie sich durch vollständige Induktion leicht nachweisen läßt, für alle natürlichen Zahlen k mit $k \geq 2$

$$f(k) = \frac{k(k-1)}{2} c.$$

Daher hat das Polynom

$$h(x) = f(x) - \frac{c}{2} x (x-1)$$

unendlich viele Nullstellen, nämlich $x = 2, 3, 4, 5, \ldots$.

Nun hat aber ein Polynom, das nicht identisch Null ist, höchstens so viele Nullstellen, wie sein Grad angibt.
Daher gilt $h(x) = 0$ für alle reellen x.
Wenn es also überhaupt ein Polynom gibt, das die verlangte Eigenschaft hat, so kann es nur ein Polynom zweiten Grades von der Form

$$f(x) = ax(x-1) = ax^2 - ax \qquad (2)$$

sein, wobei a eine reelle Zahl ist.

Nun gilt für alle reellen Zahlen x und $f(x) = ax(x-1)$

$$x\, f(x-1) = x\, a\, (x-1)(x-2) = (x-2)\, f(x),$$

also haben alle Polynome zweiten Grades vom Typ (2) und nur diese die verlangte Eigenschaft.

161246 B) Lösung: 8 Punkte

a) Die Strecken, die den Mittelpunkt des n-Ecks mit dessen Eckpunkten verbinden, zerlegen das n-Eck in n spitzwinklige Dreiecke. In eine kleinere Anzahl von sämtlich spitzwinkligen Dreiecken läßt sich das n-Eck nicht zerlegen. Anderenfalls müßten zwei nebeneinander liegende Seiten des n-Ecks zu ein und demselben Zerlegungsdreieck gehören, das dann aber, da der Winkel zwischen diesen beiden Seiten für $n \geq 5$ stumpf ist, kein spitzwinkliges Dreieck mehr ist.

b) Jedes Dreieck ABC läßt sich in drei stumpfwinklige Dreiecke zerlegen. Man verbinde hierzu den Schnittpunkt S der Winkelhalbierenden mit den drei Eckpunkten. Dann gilt

$$\sphericalangle ASB = \pi - \frac{1}{2} \cdot (\sphericalangle ABC + \sphericalangle CAB) =$$

$$= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle ACB\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle ACB > \frac{\pi}{2}.$$

Analog gilt $\sphericalangle BSC$, $\sphericalangle CSA > \frac{\pi}{2}$.

2) Jedes beliebige regelmäßige n-Eck $P_1P_2 \dots P_n$ ($n \geqq 5$) läßt sich in n stumpfwinklige Dreiecke zerlegen.

Es sei $n = 2k + 1$ (k natürliche Zahl): Das n-Eck wird durch (n-3) Diagonalen von P_1 zu den Eckpunkten $P_3, P_4, \dots, P_{n-1}$ in (n-2) Dreiecke zerlegt (siehe Abb. L 1246 B für n = 7). Die Winkel $\sphericalangle P_1P_2P_3$, $\sphericalangle P_1P_3P_4$, ..., $\sphericalangle P_1P_kP_{k+1}$, $\sphericalangle P_{k+2}P_{k+3}P_1$, ..., $\sphericalangle P_{n-1}P_nP_1$

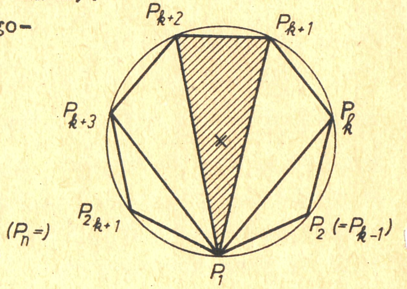

Abb. L 1246 B

sind als Peripheriewinkel im umbeschriebenen Kreis über den angegebenen Diagonalen, von denen keine Durchmesser ist, größer als 90°, da der entsprechende Eckpunkt auf dem kleineren der beiden Teilbögen liegt. Das Dreieck $P_1P_{k+1}P_{k+2}$ kann, wie angegeben, in drei stumpfwinklige Dreiecke zerlegt werden, womit eine verlangte Zerlegung gefunden ist.

Es sei $n = 2k$: Das n-Eck wird wieder durch (n-3) Diagonalen von P_1 zu den Eckpunkten $P_3, P_4, \dots, P_{n-1}$ in (n-2) Dreiecke zerlegt (siehe Abb. L 1246 Ba für n = 6). Die Diagonale P_1P_{k+1} ist Durchmesser im umbeschriebenen Kreis von $P_1P_2 \dots P_n$, also sind die Dreiecke $P_1P_kP_{k+1}$ und $P_1P_{k+1}P_{k+2}$ nicht stumpfwinklig. Das Viereck $P_1P_kP_{k+1}P_{k+2}$ wird nun in die Dreiecke $P_kP_{k+1}P_{k+2}$ (stumpfwinklig, da zwei der

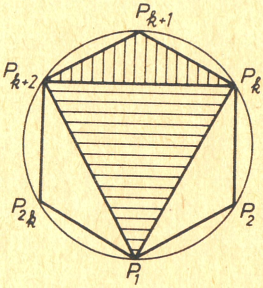

Abb. L 1246 Ba

Dreiecksseiten benachbarte n-Eckseiten sind) und $P_1P_kP_{k+2}$ zerlegt. Das Dreieck $P_1P_kP_{k+2}$ kann man dann wieder wie angegeben in drei stumpfwinklige Dreiecke zerlegt werden, womit eine gesuchte Zerlegung gefunden wurde.

3) Es wird nun gezeigt, daß eine Zerlegung in weniger als n stumpfwinklige Dreiecke nicht existieren kann. Dazu wird zuerst nachgewiesen, daß keine Zerlegung in stumpfwinklige Dreiecke existiert, die ausschließlich durch Diagonalen entsteht, d. h. bei der die Eckpunkte sämtlicher Zerlegungsdreiecke zugleich Eckpunkte des n-Ecks sind.

Angenommen, es existiert eine solche Zerlegung. Es sei o.B.d.A. P_1P_m eine Diagonale dieser Zerlegung mit maximaler Länge. Nach Voraussetzung ist sie Seite zweier Zerlegungsdreiecke $P_1P_rP_m$ und $P_1P_mP_s$ mit $1<r<m<s$.

Da P_1, P_r, P_m, P_s Eckpunkte des n-Ecks sind, ist das Viereck $P_1P_rP_mP_s$ Sehnenviereck, und es gilt:

$$\overline{\sphericalangle P_1P_rP_m} + \overline{\sphericalangle P_mP_sP_1} = \pi .$$

Dann ist jedoch einer der beiden Winkel, o.B.d.A.

$$\sphericalangle P_1P_rP_m \text{ , nicht größer als } \frac{\pi}{2} .$$

Wegen der Maximalität von P_1P_m muß aber $\sphericalangle P_1P_rP_m$ als Winkel, der der größten Seite gegenüber liegt, der größte Winkel im Dreieck $P_1P_rP_m$ sein. Folglich kann das Dreieck $P_1P_rP_m$ im Widerspruch zur Annahme nicht stumpfwinklig sein.

Da nach Voraussetzung kein Eckpunkt eines Zerlegungsdreiecks innerer Punkt einer n-Eckseite sein kann, muß folglich ein innerer Punkt P des n-Ecks existieren, der Eckpunkt eines Zerlegungsdreiecks ist, Er kann dann nicht innerer Punkt einer Seite eines anderen Zerlegungsdreiecks sein, ist also in allen Zerlegungsdreiecken, die ihn überhaupt enthalten, Eckpunkt. Die Winkel, deren Scheitelpunkt P ist, haben die Winkelsumme 2π. Die Winkel, für die die Punkte P_1, P_2, ..., P_n Scheitelpunkte sind, haben die Winkelsumme $(n-2)\pi$. Folglich .... kann die Anzahl der Zerlegungsdreiecke nicht kleiner als $\frac{1}{\pi} \cdot \left[2\pi + (n-2)\pi\right] = n$ sein.