hulanft

L 11/12;I XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11 und 12 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

161231) Lösung: 5 Punkte

Es sei (x, y) eine reelle Lösung des Gleichungssystems (1), (2). Dann gilt

$$x^2 - y^2 + y - x = 0,$$

also $$(x - y)(x + y - 1) = 0. \qquad (3)$$

Die Gleichung (3) ist nur dann erfüllt, wenn

$x - y = 0$ oder $x + y - 1 = 0$ gilt.

1) Es sei $x - y = 0$, also $x = y$. Dann folgt aus (1)

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat nur die Lösungen

$$x_1 = 1; \quad \text{dann ist } y_1 = 1;$$
$$x_2 = -2; \quad \text{dann ist } y_2 = -2.$$

2) Es sei $x + y - 1 = 0$, also $y = 1 - x$. Dann folgt aus (1)

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat nur die Lösungen

$$x_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \quad \text{dann ist } y_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2};$$
$$x_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \quad \text{dann ist } y_4 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Wenn also das Gleichungssystem reelle Lösungen hat, so können es nur die Paare

$$(1, 1), \quad (-2, -2), \quad \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \quad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

sein. Die Probe zeigt, daß das tatsächlich Lösungen von (1), (2) sind:

$$1^2 + 1 = 2; \quad (-2)^2 + (-2) = 2; \quad \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 2;$$
$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2.$$

30 06 30-1/1ooo/77 (2o4)

161232) Lösung: 7 Punkte

Eine Ebene durch die Achse des Kegels schneidet diesen in einem gleichschenkligen Dreieck ABC (mit AB als Grundlinie) und die n-te Kugel in einem Kreis k_n. Nun gilt $\overline{AB} = 2r$; die zugehörige Höhe hat die Länge h, auf dieser Höhe liegt für jedes $n = 1, 2, \ldots$ der Mittelpunkt M_n von k_n. Die Schnittpunkte jeweils von k_n mit der Höhe seien so mit P_{n-1} und P_n bezeichnet, daß auf der Achse insgesamt die Anordnung $P_o, P_1, P_2, \ldots$ entsteht. Die Parallele durch P_n zu AB schneide SA in A_n, das Lot von M_n auf SA habe den Fußpunkt Q_n. Dann gilt $\overline{M_nP_{n-1}} = \overline{M_nQ_n} = \overline{M_nP_n} = r_n$, ferner führen wir für die folgenden einander gleichen Längen der Tangentenabschnitte die Bezeichnung $s = \overline{A_nQ_n} = \overline{A_nP_n} = \overline{A_nQ_{n-1}}$ ein.

Insbesondere wird $A_o = A$, $s_o = r$.
Nun sind für beliebiges n die Vierecke $A_nP_nM_{n+1}Q_{n+1}$ und $M_nQ_nA_nP_n$ Drachenvierecke mit rechten Winkeln bei Q_{n+1}, P_n und Q_n. Somit ist $\overline{\sphericalangle Q_{n+1}A_nP_n} = 180^o - \overline{\sphericalangle P_nA_nQ_n} = \overline{\sphericalangle P_nM_nQ_n}$, also sind die Drachenvierecke einander ähnlich mit

$$\overline{P_nM_{n+1}} : \overline{A_nP_n} = \overline{Q_nA_n} : \overline{M_nQ_n} = \overline{P_{n-1}M_n} : \overline{A_{n-1}P_{n-1}},$$

also $$\frac{r_{n-1}}{s_n} = \frac{s_n}{r_n} = \frac{r_n}{s_{n-1}} = \ldots = \frac{r_1}{r}.$$

Daraus folgt $$\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 = \frac{r_{n+1}}{s_n} \cdot \frac{s_n}{r_n} = \frac{r_{n+1}}{r_n}.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke SQ_1M_1 und SP_oA_o folgt ferner

$$\frac{h - r_1}{r_1} = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{r}$$

Hieraus ergibt sich einerseits $(h - r_1)^2r^2 = r_1^2(h^2 + r^2)$,

$$h^2r^2 - 2hr_1r^2 = r_1^2h^2,$$

$$1 - \frac{2r_1}{h} = \frac{r_1^2}{r^2} = \frac{r_{n+1}}{r_n},$$

also die Aussage, daß (r_n) eine geometrische Folge mit dem Quotienten $q = \frac{h - 2r_1}{h}$ ist, andererseits $\frac{h}{r_1} - 1 = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{r}$,

$$\frac{h}{r_1} = \frac{\sqrt{h^2 + r^2} + r}{r},$$

$$r_1 = \frac{rh}{\sqrt{h^2 + r^2} + r}.$$

Daher ist der gefundene Quotient

$$q = 1 - \frac{2r_1}{h} = 1 - \frac{2\,r}{\sqrt{h^2 + r^2} + r} = \frac{\sqrt{h^2 + r^2} - r}{\sqrt{h^2 + r^2} + r}.$$

Hiernach gilt - als gesuchte Formel zur Ermittlung von r_n -

$$r_n = r_1 q^{n-1} = rh\,\frac{(\sqrt{h^2 + r^2} - r)^{n-1}}{(\sqrt{h^2 + r^2} + r)^n}$$

<u>Hinweis zur Korrektur</u>: Entsprechend der Aufgabenformulierung kann auch eine andere (z. B. eine rekursive) Darstellung der Folge (r_n) als Lösung gewertet werden, wenn sie gestattet, r_n durch (eventuell im Sinne der Rekursion zu wiederholendes) Einsetzen in angegebene Formeln aus r und h zu gewinnen, und wenn zusätzlich gezeigt ist, daß eine geometrische Folge mit dem behaupteten Quotienten vorliegt.

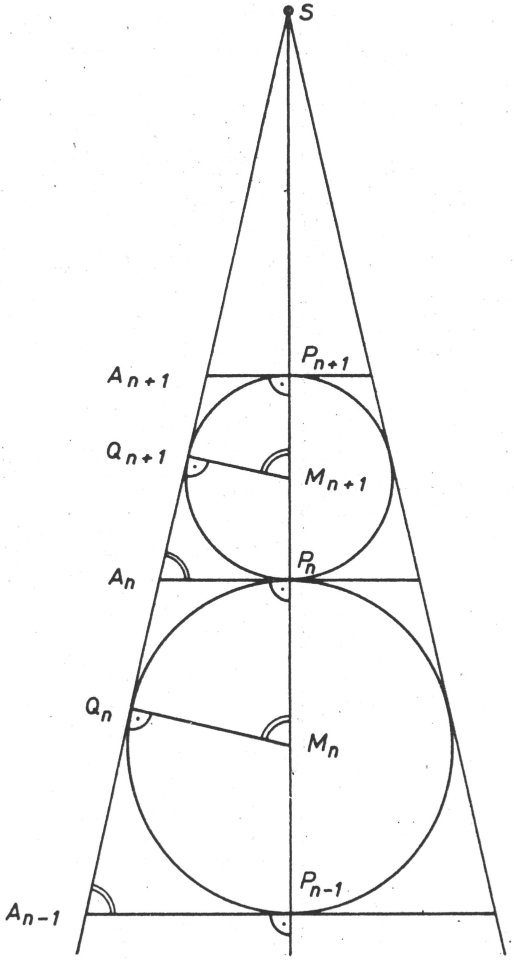

Abb. L 1232

L 11/12;I

161233) Lösung: 7 Punkte

Eine in der Aufgabe genannte Strecke heiße "zweifarbig", wenn sie zwei verschiedenfarbige Punkte miteinander verbindet, sonst "einfarbig". Ein Punkt ist genau dann außergewöhnlich, wenn von ihm mehr zweifarbige als einfarbige Strecken ausgehen. Wird ein außergewöhnlicher Punkt umgefärbt, so gehen danach von ihm mehr einfarbige als zweifarbige Strecken aus, während alle nicht von ihm ausgehenden Strecken unverändert bleiben. Daher wird bei jeder Auswahl eines Punktes und seinem Umfärben die Anzahl der zweifarbigen Strecken kleiner.

Käme man nicht nach endlich vielen Schritten auf diese Weise zum Ziel, so müßte es eine Menge geben, von der aus unendlich viele Umfärbungen der genannten Art möglich wären, und es entstände als Folge der Anzahlen der jeweils vorliegenden zweifarbigen Strecken somit eine unendliche streng monoton abnehmende Folge natürlicher Zahlen, was nicht möglich ist.

Dieser Widerspruch beweist die zu zeigende Behauptung.

[illegible]

L 11/12;II XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

161234) Lösung: **6 Punkte**

a) Für beliebige x, y und $z = \pi - (x + y)$ gilt:

$$\cos 2x + \cos 2y - \cos 2z = 2\cos(x+y)\cos(x-y) + 1 - 2\cos^2(x+y)$$

$$= -2\left[\cos(x+y) - \frac{1}{2}\cos(x-y)\right]^2 + \frac{1}{2}\cos^2(x-y) + 1.$$

sowie

$$-2\left[\cos(x+y) - \frac{1}{2}\cos(x-y)\right]^2 \leqq 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{2}\cos^2(x-y) \leqq \frac{1}{2}.$$

Hieraus folgt:

$$\cos 2x + \cos 2y - \cos 2z \leqq 0 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

b) Aus dieser Herleitung folgt ferner, daß in (1) genau dann das Gleichheitszeichen gilt, wenn

$\cos(x+y) - \frac{1}{2}\cos(x-y) = 0$ und $\cos^2(x-y) = 1$ gelten.

Dies ist gleichwertig mit der Aussage, es gelte

entweder: $\cos(x-y) = 1$ und $\cos(x+y) = \frac{1}{2}$

oder: $\cos(x-y) = -1$ und $\cos(x+y) = -\frac{1}{2}$.

Nun ist $\cos(x-y) = 1$ genau dann erfüllt, wenn

$$x - y = 2h\pi \quad (h \text{ ganzzahlig}) \qquad (2)$$

gilt, und $\cos(x+y) = \frac{1}{2}$ gilt genau dann, wenn entweder

$$x + y = \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi \quad (k_1 \text{ ganzzahlig}) \qquad (3)$$

oder

$$x + y = -\frac{\pi}{3} + 2k_2\pi \quad (k_2 \text{ ganzzahlig}) \qquad (3')$$

gilt.

Ferner ist $\cos(x-y) = -1$ genau dann erfüllt, wenn

$$x - y = \pi + 2h'\pi \quad (h' \text{ ganzzahlig}) \qquad (4)$$

30 06 30-1/1ooo/77 (2o4)

gilt, und $\cos(x+y) = -\frac{1}{2}$ gilt genau dann, wenn entweder

$$x + y = \frac{2\pi}{3} + 2k_1'\pi \quad (k_1' \text{ ganzzahlig}) \qquad (5)$$

oder

$$x + y = -\frac{2\pi}{3} + 2k_2'\pi \quad (k_2' \text{ ganzzahlig}) \qquad (5')$$

gilt.

Mit (2), (3) und $z = \pi - (x+y)$ ist gleichwertig

$$x = \frac{\pi}{6} + (k_1+h_1)\pi\,,\quad y = \frac{\pi}{6} + (k_1-h_1)\pi\,,\quad z = \frac{2\pi}{3} - 2k_1\pi \qquad (h_1, k_1 \text{ ganz}), \qquad (6)$$

mit (2), (3') und $z = \pi - (x+y)$ ist gleichwertig

$$x = -\frac{\pi}{6} + (k_2+h_2)\pi\,,\quad y = -\frac{\pi}{6} + (k_2-h_2)\pi\,,\quad z = \frac{4\pi}{3} - 2k_2\pi \qquad (h_2, k_2 \text{ ganz}), \qquad (7)$$

mit (4), (5) und $z = \pi - (x+y)$ ist gleichwertig

$$x = \frac{5\pi}{6} + (k_1'+h_1')\pi\,,\quad y = -\frac{\pi}{6} + (k_1'-h_1')\pi\,,\quad z = \frac{\pi}{3} - 2k_1'\pi \qquad (h_1', k_1' \text{ ganz}), \qquad (8)$$

mit (4), (5') und $z = \pi - (x+y)$ ist gleichwertig

$$x = \frac{\pi}{6} + (k_2'+h_2')\pi\,,\quad y = -\frac{5\pi}{6} + (k_2'-h_2')\pi\,,\quad z = \frac{5\pi}{3} - 2k_2'\pi \qquad (h_2', k_2' \text{ ganz}). \qquad (9)$$

161235) Lösung: 7 Punkte

Unter allen Dreiecken, deren Eckpunkte zu der gegebenen Menge gehören, werde ein solches Dreieck ABC ausgewählt, dessen Flächeninhalt F maximal ist. Nach Voraussetzung gibt es unter diesen Dreiecken mindestens eines mit positivem Flächeninhalt, also gilt insbesondere $F > 0$, d. h. das Dreieck ABC kann nicht entartet sein.

Durch A, B und C werde jeweils die Parallele zur gegenüberliegenden Dreiecksseite gezogen. Der Flächeninhalt des so gebildeten Dreiecks A'B'C' (Abb. L 1235) ist 4F, wegen $F \leq 1$ also nicht größer als 4.

Im Innern dieses Dreiecks A'B'C' oder auf seinem Rand liegen dann alle Punkte der gegebenen Menge; denn gäbe es in ihr einen Punkt P außerhalb des Dreiecks A'B'C', so befände sich dieser o.B.d.A. auf der C' nicht enthaltenden Seite der Geraden durch A' und B'. Dann wäre aber der Flächeninhalt des Dreiecks ABP größer als der Flächeninhalt F des Dreiecks ABC, was der vorausgesetzten Maximalität von F widerspricht. Damit ist die Behauptung bewiesen.

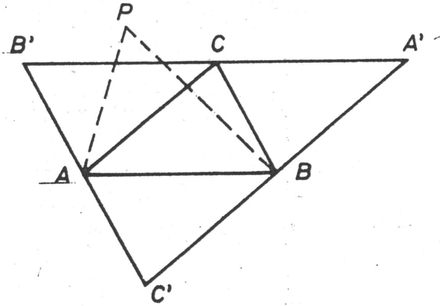

Abb. L 1235

161236 A) Lösung: 8 Punkte

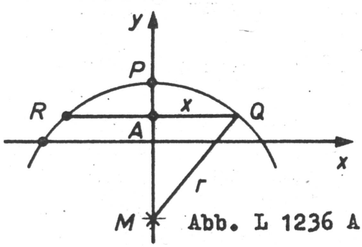

Abb. L 1236 A

a) Es sei M der Mittelpunkt und r der Radius des zu x gehörenden Kreises. Ferner sei A (0; cos x).

Dann ist $\overline{PA} = 1 - \cos x$,

$\overline{AM} = r - (1 - \cos x)$

und $\overline{AQ} = x$.

In dem rechtwinkligen Dreieck MQA gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$[r - (1 - \cos x)]^2 + x^2 = r^2.$$

$$2r\,(1 - \cos x) = (1 - \cos x)^2 + x^2. \qquad (1)$$

Daraus ergibt sich als gesuchte Funktion f diejenige, für die

$$f(x) = r = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 2\cos x + (1 - \sin^2 x) + x^2}{1 - \cos x} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{x^2 - \sin^2 x}{1 - \cos x}\right) \qquad (2)$$

ist.

b) Es gilt weiterhin für $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$

$$r = f(x) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{(x^2 - \sin^2 x)(1 + \cos x)}{\sin^2 x}\right),$$

$$= \frac{1}{2}\left[2 + \left(\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 - 1\right) \cdot \left(1 + \cos x\right)\right].$$

Wegen $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ gilt also

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2}\left[2 + (1 - 1) \cdot (1 + 1)\right] = 1.$$

c) Aus Gleichung (1) erhält man auch wegen $0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$

$$r = f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos x + \frac{x^2}{1 - \cos x}\right).$$

Daraus folgt

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\sin x + \frac{2x(1 - \cos x) - x^2 \cdot \sin x}{(1 - \cos x)^2}\right)$$

Wegen $1 - \cos x = \sin x \cdot \tan \frac{x}{2}$ erhält man

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\sin x + 2x \cdot \sin x \cdot \frac{\tan \frac{x}{2} - \frac{x}{2}}{(1 - \cos x)^2}\right).$$

Wegen $\tan \frac{x}{2} > \frac{x}{2}$ gilt für alle x mit $0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$

$f'(x) > 0$, d. h. $f(x)$ ist streng monoton steigend.

Da die Funktion f im Intervall $0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$ streng monoton wachsend ist, da ferner

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \quad \text{und} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}$$

ist, gilt also

$$1 < f(x) \leqq \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}$$

Dabei nimmt die Funktion f jeden Wert aus dem halboffenen Intervall

$$I = \left(1, \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}\right] \tag{2}$$

auch wirklich an.

Beweis: Die Funktion g mit $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ für } 0 < x \leqq \frac{\pi}{2} \\ 1 \text{ für } x = 0 \end{cases}$

ist wegen $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ in $(0, \frac{\pi}{2}]$ stetig und nimmt folglich nach dem Zwischenwertsatz jeden Wert aus $(g(0), g(\frac{\pi}{2})]$ an und zwar in $(0, \frac{\pi}{2}]$.

Da g in diesem Intervall mit f übereinstimmt, nimmt f jeden Wert aus $\left(g(0), g(\frac{\pi}{2})\right] = \left(1, \frac{\pi^2}{8}\right]$ an.

Daher ist der Wertebereich der Funktion f das Intervall I.

161236 B) Lösung: 8 Punkte

Es sei für beliebige $p \in M$, $q \in M$, $r \in M$, $s \in M$

$$p/q = x, \quad \text{also } x \circ q = p, \qquad (1)$$
$$r/s = y, \quad \text{also } y \circ s = r, \qquad (2)$$
$$p/r = u, \quad \text{also } u \circ r = p, \qquad (3)$$
$$q/s = v, \quad \text{also } v \circ s = q, \qquad (4)$$
$$x/y = z, \quad \text{also } z \circ y = x, \qquad (5)$$
$$u/v = w, \quad \text{also } w \circ v = u. \qquad (6)$$

Aus (1), (3) folgt $x \circ q = u \circ r$.
Hieraus und aus (5), (4), (6), (2) folgt

$$(z \circ y) \circ (v \circ s) = (w \circ v) \circ (y \circ s)$$

Nach der vorausgesetzten Beziehung ist dies

$$= (w \circ y) \circ (v \circ s).$$

Da genau ein Element in M existiert, das mit $v \circ s$ verknüpft das Element auf den Seiten dieser Gleichung ergibt, folgt

$$z \circ y = w \circ y.$$

Da genau ein Element in M existiert, das mit y verknüpft das Element auf den Seiten dieser Gleichung ergibt, folgt

$$z = w.$$

Nach (5), (6) besagt dies $x/y = u/v$, und nach (1), (2), (3), (4) besagt dies $(p/q)/(r/s) = (p/r)/(q/s)$, w.z.b.w.