Urlaub

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

161221) Lösung: **7 Punkte**

Laut Aufgabe gilt:

(1) $ab = A$,

(2) $a^2 + b^2 = d^2$,

(3) $a = \frac{1}{2}(b + d)$.

Aus (3) folgt

(4) $2a - b = d$,

hieraus und aus (2)

$4a^2 - 4ab + b^2 = d^2 = a^2 + b^2$, nach (1) also

(5) $3a^2 = 4ab = 4A$.

Wegen $A > 0$ und $a > 0$ ergibt sich daraus

(6) $a = \frac{2}{3}\sqrt{3A}$,

hieraus nach (5)

(7) $b = \frac{3}{4}a = \frac{1}{2}\sqrt{3A}$

und daraus nach (4)

(8) $d = (\frac{4}{3} - \frac{1}{2})\sqrt{3A} = \frac{5}{6}\sqrt{3A}$.

161222) Lösung: **10 Punkte**

Es seien r_n der Radius von K_n und r'_n der Radius von Z_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Für jedes $n = 1, 2, \ldots$ gilt: Da Z_n der Kugel K_n einbeschrieben ist, schneidet je eine Ebene durch die Achse des Zylinders Z_n diesen in einem Quadrat und die Kugel K_n in einem Kreis, dem dieses Quadrat einbeschrieben ist (Abb. L 1222).

Da für jeden Achsenschnitt von Z_n diese Quadrate und folglich auch diese Kreise gleichgroß sind, liegt der Mittelpunkt von K_n auf der Zylinderachse, der Radius der genannten Kreise ist also r_n. Daraus folgt

$$r'_n = \frac{r_n}{\sqrt{2}} .$$

Da ferner K_{n+1} dem Zylinder Z_n einbeschrieben ist, ist $2r_{n+1}$ gleich der Höhenlänge $2r'_n$ von Z_n, also gilt

$$r_{n+1} = r'_n = \frac{r_n}{\sqrt{2}} . \tag{1}$$

Daraus folgt

$$r_n = \frac{r}{(\sqrt{2})^{n-1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots); \tag{2}$$

denn für $n = 1$ lautet diese Aussage $r_1 = r$, ist also richtig, und gilt sie für ein natürliches $n \geqq 1$, so folgt aus (1), daß sie auch für $n + 1$ gilt.

Daher gilt

$$V_n = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{1}{(\sqrt{8})^{n-1}} \tag{3}$$

a) Speziell gilt

$$V_{10} = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{1}{(\sqrt{8})^9} = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{2\sqrt{2}}{8^5} ,$$

$$V_{10} = \frac{\pi r^3}{3 \cdot 2^{12}}\sqrt{2} .$$

b) Weiter gilt

$$S_n = V_1 + V_2 + \ldots + V_n = \frac{4}{3}\pi r^3 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{(\sqrt{8})^2} + \ldots + \frac{1}{(\sqrt{8})^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{1 - \frac{1}{(\sqrt{8})^n}}{1 - \frac{1}{\sqrt{8}}} = \frac{4\pi r^3 \sqrt{8}}{3(\sqrt{8} - 1)}\left(1 - \frac{1}{(\sqrt{8})^n}\right)$$

$$= \frac{8}{21}\pi r^3 (4 + \sqrt{2})\left(1 - \frac{1}{(\sqrt{8})^n}\right). \tag{4}$$

Speziell gilt

$$S_{10} = \frac{8}{21}\pi r^3(4+\sqrt{2})(1-\frac{1}{8^5}) = \frac{2^{15}-1}{21\cdot 2^{12}}\pi r^3(4+\sqrt{2}).$$

c) Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{8})^n} = 0$ folgt aus (4), daß $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ existiert, und zwar ist

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{8}{21}\pi r^3(4+\sqrt{2}).$$

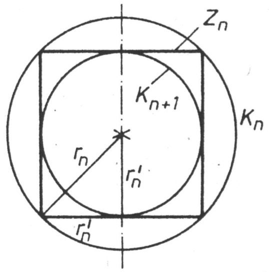

Abb. L 1222

161223) Lösung: 11 Punkte

Das Quadrat wird durch je vier geeignete Parallelen zu zwei seiner benachbarten Seiten in 25 kongruente Teilquadrate der Kantenlänge $\frac{1}{5}$ zerlegt. Dabei denke man sich auch die Randpunkte der Teilquadrate diesen so zugeordnet, daß jeder Punkt des gesamten Quadrates zu genau einem Teilquadrat gehört. Würden die Teilquadrate sämtlich höchstens je zwei der einzuzeichnenden Punkte enthalten, so könnten sich im Quadrat insgesamt höchstens 50 dieser Punkte befinden. Also existiert ein Teilquadrat, das wenigstens drei der genannten Punkte enthält. Die Diagonale dieses Teilquadrats hat die Länge $\frac{1}{5}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{4}{50}}$.

Wegen $\sqrt{\frac{4}{50}} < \sqrt{\frac{4}{49}} = \frac{2}{7}$ kann man dieses Teilquadrat mit einem Kreis vom Radius $\frac{1}{7}$ so überdecken, daß es ganz im Innern des Kreises liegt. Dieser Kreis enthält dann wenigstens drei der 51 Punkte in seinem Innern.

161224) Lösung: 12 Punkte

a) Genau dann sind x und y nichtnegative reelle Zahlen, für die (1) und (2) gilt, wenn es zu ihnen nichtnegative reelle Zahlen u und v gibt, für die

$8x + 3y + u = 25$ (4) und

$-2x + 3y + v = 10$ (5) gilt.

Aus (4) und (5) folgt

$$10x + u - v = 15, \text{ also}$$

$$x = \frac{15 - u + v}{10}. \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt

$$y = \frac{65 - u - 4v}{15}, \quad (7)$$

und umgekehrt folgt aus (6), (7) auch wieder (4), (5).

Aus (6) und (7) folgt wegen (3) und wegen $u \geq 0$, $v \geq 0$

$$z = 2x + y = \frac{110 - 4u - v}{15} \leq \frac{110}{15} = \frac{22}{3}, \quad (8)$$

d. h., z nimmt einen größten Wert an, und zwar den Wert $\frac{22}{3}$, wenn $u = v = 0$ ist; denn hierfür entstehen in (6) und (7) die nichtnegativen Zahlen $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{13}{3}$.

b) Genau dann sind x und y nichtnegative ganze Zahlen, für die (1) und (2) gilt, wenn es zu ihnen nichtnegative ganze Zahlen u und v gibt, für die die Gleichungen (6) und (7) gelten. Ist dies der Fall, ist auch

$$2x + y = z = \frac{110 - 4u - v}{15} = 7 + \frac{5 - 4u - v}{15} \quad \text{ganzzahlig.}$$

Wegen $\frac{5 - 4u - v}{15} \leq \frac{5}{15} < 1$ folgt hieraus, daß die ganze Zahl

$\frac{5 - 4u - v}{15} \leq 0$ sein muß, d. h., daß $z \leq 7$ gilt, und zwar

gilt $z = 7$, wenn $4u + v = 5$ so durch nichtnegative ganze Zahlen u und v erreicht werden kann, daß auch die in (6) und (7) entstehenden x und y nichtnegative ganze Zahlen sind. Für $u = 0$, $v = 5$ ist dies der Fall, da sich $x = 2$, $y = 3$ ergibt.

Daher existiert auch im Falle b) ein größter Wert für z, und zwar $z = 7$, der für $x = 2$, $y = 3$ angenommen wird.