Krüger
Klaus Krüger
256 Bad Doberan
Kollbruchweg 3

A 10;I

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

161041

Man beweise den folgenden Satz: Ist OPQR ein Parallelogramm, sind ein Punkt X auf der Verlängerung von OP über P hinaus und ein Punkt Y auf der Verlängerung von OR über R hinaus gelegen und ist S der Schnittpunkt von PY mit RX, so sind die Vierecke OPSR und SXQY einander flächeninhaltsgleich.

161042

Konstruieren Sie ein Trapez ABCD mit $AB \parallel CD$ aus $a + c = 13$ cm, $e + f = 15$ cm, $\varphi = 100^\circ$ und $\varepsilon = 70^\circ$!

Dabei seien a die Länge der Seite AB, c die Länge der Seite CD, e die Länge der Diagonalen AC, f die Länge der Diagonalen BD, ε die Größe des Winkels $\sphericalangle$ DAC und φ die Größe des Winkels $\sphericalangle$ ASB. S bezeichne den Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Trapezes.

Untersuchen Sie, ob ein solches Trapez existiert und bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

3o o6 31-1/1ooo/77 (2o4)

1. u. 2. Zeile: ... drei Sportarten, sowie in der Gesamtwertung eindeutig ...

A 10;I

Von den nachstehenden Aufgaben 1043 A und 1043 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

161043 A

Bei einem sportlichen Dreikampf ergab sich in jeder der drei Sportarten eindeutig eine Reihenfolge der Sportler (gekennzeichnet durch Platzziffern 1, 2, 3, ...). In jeder der drei Sportarten wurden für die ersten fünf Plätze Punkte so vergeben, daß die Punktzahl (natürliche Zahl > 0) mit wachsender Platzziffer immer kleiner wurde und vom 2. Platz an mit wachsender Platzziffer die Punktdifferenz zwischen benachbarten Plätzen stets konstant war. Diese Punktbewertung war für jede der drei Sportarten die gleiche.

Nach zwei Wettkämpfen ergab sich, daß die ersten drei Plätze in jeder dieser beiden Sportarten stets von den Sportlern A, B, C errungen wurden (nicht notwendig in dieser Reihenfolge).
Jeder der Sportler A und B hatte nach zwei Wettkämpfen 17 Punkte, und der Sportler C hatte 16 Punkte erreicht.
In der Gesamtwertung des Dreikampfes (Summe der drei erreichten Punktzahlen) siegte der Sportler D, Zweiter wurde der Sportler C.

Man ermittle in den einzelnen drei Sportarten für die Sportler C und D diejenigen Platzziffern, die diese Bedingungen erfüllen.

161043 B

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen p, für die die Gleichung

$$\frac{x^2 - p + 3p^2}{x - p} + 2x = 3$$

eine Lösungsmenge L hat, die

a) leer ist
b) genau ein Element enthält
c) aus mehr als einem Element besteht!

16.1043 B
Die Gleichung ist auf reelle Lösungen zu untersuchen, d.h. L ist die Menge der reellen Lösungen

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

161044

Man ermittle alle ganzzahligen Zahlenpaare $(x;y)$, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$xy + 3x - 2y - 3 = 0.$$

161045

Für ein Rechteck ABCD sei a die Länge der Strecke BC, ferner sei die Diagonale AC eine q mal so lange Strecke wie BC (q reell). Von den Eckpunkten B und D seien die Lote auf AC gefällt, ihre Fußpunkte seien in dieser Reihenfolge E und F.

Man ermittle aus den gegebenen Werten a und q den Flächeninhalt des Vierecks FBED.

161046

In einer Ebene ε sei ABCDEF ein regelmäßiges Sechseck. Eine Ebene ε' sei zu ε parallel. In ε' liege ein regelmäßiges Sechseck $A'B'C'D'E'F'$ so, daß die Strecken AA', BB', CC', DD', EE' und FF' auf ε senkrecht stehen. Gegeben seien die Seitenlänge $a = \overline{AC}$ des Dreiecks ACE sowie der Abstand h zwischen ε und ε'.
Man berechne hieraus das Volumen V des Polyederkörpers, der genau die Strecken AC, CE, EA, $B'D'$, $D'F'$, $F'B'$, AB', AF', CB', CD', ED' und EF' als Seitenkanten hat (s. Abb. A 1046).

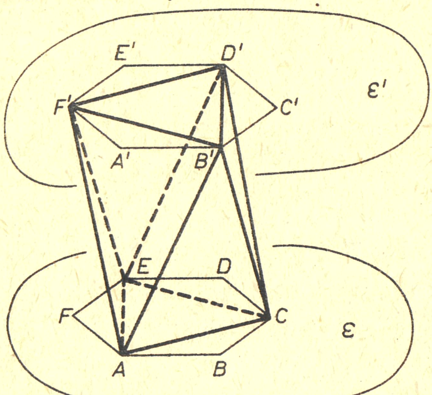

Abb. A 1046

L 10;I XVI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

4. Stufe (DDR-Olympiade)

<u>Lösungen und Punktbewertung</u>

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

161041) Lösung: **5 Punkte**

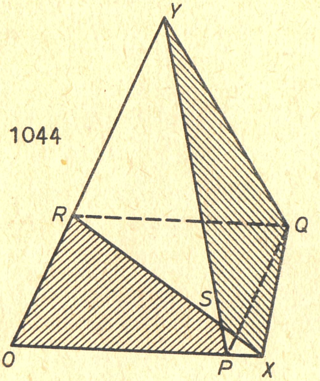

Abb. L 1044

Es gilt [1] $2\,A_{OPSR} + A_{SPX} + A_{SRY}$

$= A_{ORX} + A_{OPY}$

Begründung

$= A_{OQX} + A_{OQY}$

$= A_{OPSR} + A_{SPX}$

$+ A_{SRY} + A_{SXQY}$

also $A_{OPSR} = A_{SXQY}$,

w.z.b.w.

1) Hat ein Polygon die Ecken $E_1, \ldots, E_n$ und den Flächeninhalt F, so setzen wir

$$F = A_{E_1 \ldots E_n}.$$

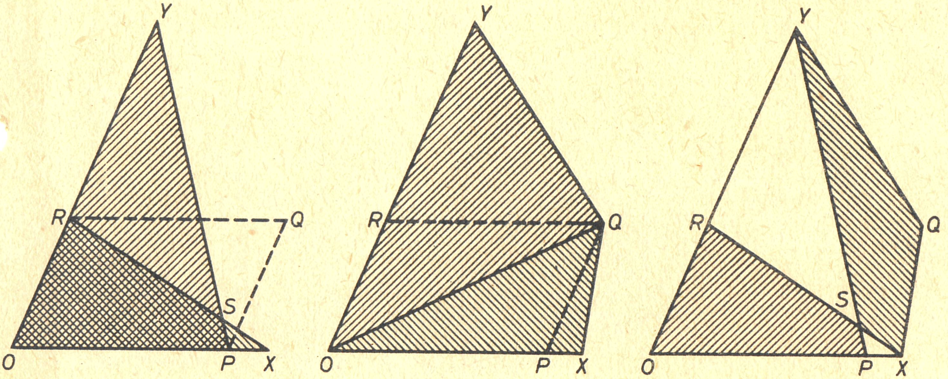

Abb. L 1044 a

161042) Lösung: **7 Punkte**

I. Angenommen, ABCD sei ein Trapez mit $AB \parallel CD$, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

E liege 1. auf der Verlängerung von AB über B hinaus und
2. auf der Parallelen zu BD durch C.

Dann gilt nach dem Satz über Stufenwinkel $\overline{\sphericalangle ASB} = \overline{\sphericalangle ACE} = \varphi$,

und, da BECD ein Parallelogramm ist, $\overline{BE} = \overline{CD} = c$, also

$\overline{AE} = a + c$ und $\overline{CE} = \overline{BD} = f$.

F liege 1. auf der Verlängerung von AC über C hinaus und
2. auf dem Kreis um C mit f.

Dann gilt $\overline{AF} = e + f$ und nach dem Satz über gleichschenklige Dreiecke und dem Dreiecksaußenwinkelsatz $\overline{\sphericalangle CFE} = \overline{\sphericalangle FEC} = \frac{\varphi}{2}$ (*)

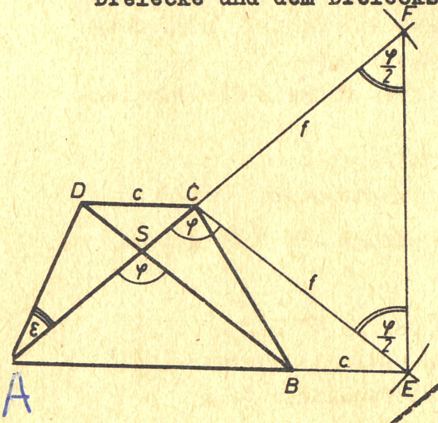

Abb. L 1042

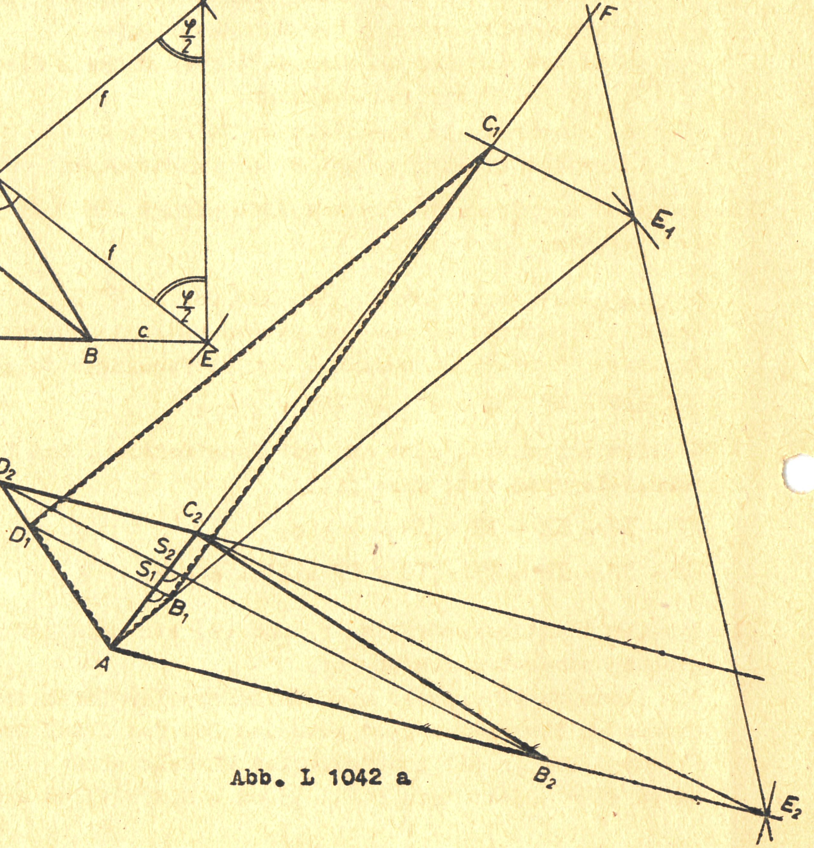

Abb. L 1042 a

Daraus ergibt sich, daß ein Viereck ABCD nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man zeichnet eine Strecke AF der Länge $e + f$.

(2) Man trägt an FA in F einen Winkel der Größe $\frac{\varphi}{2}$ an.

(3) Man zeichnet den Kreis mit $a + c$ um A.
Schneidet der Kreis den freien Schenkel des Winkels, so sei E einer der Schnittpunkte.

(4) Man trägt an EF in E einen Winkel der Größe $\frac{\varphi}{2}$ nach derselben Seite an, auf der A liegt.
Schneidet der freie Schenkel dieses Winkels AF, so sei C der Schnittpunkt.

(5) Man zeichnet die Parallele zu AE durch C.

(6) Man trägt an AF in A einen Winkel der Größe ε nach derjenigen Seite an, auf der E nicht liegt.
Schneidet der freie Schenkel dieses Winkels die Parallele, so sei D der Schnittpunkt.

(7) Man zeichnet die Parallele zu EC durch D.
Schneidet sie AE, so sei B der Schnittpunkt.

III. Jedes so konstruierte Viereck ABCD genügt den Bedingungen der Aufgabe.

<u>Beweis:</u> Laut Konstruktion gilt $AB \parallel CD$ und $\overline{\sphericalangle DAC} = \varepsilon$.
Aus der Konstruktion und den Sätzen über gleichschenklige Dreiecke, Dreiecksaußenwinkel und Stufenwinkel folgt:

$$\overline{\sphericalangle ASB} = \overline{\sphericalangle ACE} = 2 \cdot \overline{\sphericalangle AFE} = 2 \cdot \frac{\varphi}{2} = \varphi .$$

Schließlich ergibt sich aus der Konstruktion, daß BECD ein Parallelogramm ist; also gilt:

$$\overline{AB} + \overline{DC} = \overline{AB} + \overline{BE} = \overline{AE} = a + c;$$

$$\overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AC} + \overline{CE} = \overline{AC} + \overline{CF} = \overline{AF} = e + f.$$

IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.
Ein (konstruktiver oder rechnerischer) Vergleich der entstehenden Strecken ergibt, daß das Lot von A auf den freien Schenkel des in (2) konstruierten Winkels eine Länge ℓ ($= 15\text{ cm} \cdot \sin 50^\circ < 15\text{ cm} \cdot 0{,}8$) $< 13\text{ cm} = a + c$

hat; ferner gilt für die gegebenen Werte $a + c < e + f$. Also führt Konstruktionsschritt (3) zu genau zwei verschiedenen Punkten E_1, E_2.

Für beide ergibt Konstruktionsschritt (4) je genau einen Punkt C_1 bzw. C_2; denn wegen $\overline{AE_i} < \overline{AF}$ $(i = 1, 2)$ hat der in E_i angetragene Winkel eine Größe $(\frac{\varphi}{2} = \overline{\sphericalangle E_i FA}) < \overline{\sphericalangle FE_iA}$.

Konstruktionsschritt (5) ist jeweils eindeutig ausführbar.

Da für die gegebenen Werte $\varepsilon < \varphi$, also erst recht $\varepsilon < \frac{\varphi}{2} + \overline{\sphericalangle FE_iA}$ ausfällt, ergibt sich auch in Konstruktionsschritt (6) je genau ein Schnittpunkt D_i $(i = 1, 2)$.

Ferner folgt aus $\varepsilon < \varphi$: Trägt man wie in (6) anstelle von ε einen Winkel der Größe φ an, so ergibt sich mit der Parallelen aus (5) ein Schnittpunkt Z_i auf der Verlängerung von C_iD_i über D_i hinaus. Für ihn ist $AE_iC_iZ_i$ ein Parallelogramm, also gilt $\overline{C_iZ_i} = \overline{AE_i}$, und es folgt $\overline{C_iD_i} < \overline{AE_i}$. Also schneidet die in (7) zu konstruierende Parallele jeweils AE_i in einem zwischen A und E_i gelegenen Punkt B_i.

Somit existieren bis auf Kongruenz genau die Trapeze $AB_1C_1D_1$, $AB_2C_2D_2$, die den Bedingungen der Aufgabe genügen. Wegen $\overline{\sphericalangle C_1AB_1} \neq \overline{\sphericalangle C_2AB_2}$ sind sie nicht zueinander kongruent [jedenfalls nicht bei Auffassung von B_1B_2 bzw. C_1, C_2 bzw. D_1, D_2 als gleichliegenden Punkten; aber auch bei anderer Auffassung nicht, wie sich etwa aus $\overline{\sphericalangle C_2D_2A} < \overline{\sphericalangle B_1AD_1}$ herleiten läßt]*).

---

*) Diese Überlegung wird vom Schüler nicht verlangt.

161043 A) Lösung: **8 Punkte**

Nach den Angaben über die Punktbewertung gibt es ganze Zahlen a, b, $c > 0$ so, daß die Punktbewertung folgendermaßen lautet:

Platzziffer:	1	2	3	4	5
Punktzahl:	$a+3b+c$	$a+3b$	$a+2b$	$a+b$	a

Wenn ein Sportler in zwei Sportarten die in der folgenden Tabelle genannten Platzziffern erreichte, so erhält er demnach die hierbei genannte Punktzahl:

Platzziffern	Punktzahl
1,1	$2a + 6b + 2c$
1,2	$2a + 6b + c$
1,3	$2a + 5b + c$
2,2	$2a + 6b$
2,3	$2a + 5b$
3,3	$2a + 4b$

Nur dann können zwei Punktzahlen, die hier in verschiedenen Zeilen stehen, einander gleich sein, wenn dies die Zahlen $2a+5b+c$ und $2a+6b$ sind; dann aber ist diese Zahl gerade. Daher können A und B nur dadurch je 17 Punkte erreicht haben, daß sie in den beiden Sportarten dasselbe Paar von Platzziffern hatten, nur in entgegengesetzter Reihenfolge. Dies kann nicht der 2. und 3. Platz gewesen sein; denn dann hätte C zweimal den 1. Platz, also eine höhere Punktzahl erreicht. Es kann auch nicht der 1. und 2. Platz gewesen sein; denn dann hätte C zweimal den 3. Platz, also eine nicht nur um 1 kleinere Punktzahl erreicht.
Daher hatten A und B (zweimal, nur in entgegengesetzter Reihenfolge) die Plätze 1 und 3 erreicht, und C kam zweimal auf Platz 2. Hiernach gilt

$$2a + 5b + c = 17. \qquad (1)$$
$$2a + 6b = 16. \qquad (2)$$

Aus (2) folgt $3b = 8 - a < 9$, also $b < 3$; daher und wegen (2), (1) verbleiben genau die folgenden Möglichkeiten

	Platzziffer	1	2	3	4	5
Fall I) $b = 1$, $a = 5$, $c = 2$:	Punktzahl	10	8	7	6	5
Fall II) $b = 2$, $a = 2$, $c = 3$:	Punktzahl	11	8	6	4	2

L 10;I

Fall I: Da C noch A und B in der Gesamtpunktzahl übertraf, muß er im 3. Wettkampf Punkte bekommen haben. Die geringste Punktzahl, die vergeben wurde, betrug 5. Also hatte C insgesamt mindestens 16 + 5 = 21 Punkte. D mußte folglich mindestens 22 Punkte haben. D kann in den ersten beiden Wettkämpfen höchstens zweimal den vierten Platz (12 Punkte) und im 3. Wettkampf höchstens den ersten Platz (10 Punkte) belegt haben. Damit konnte er höchstens 22 Punkte erhalten. Also hatte er genau 22 Punkte, und C hatte genau 21 Punkte.

Fall II. Mit der analogen Begründung (zu Fall I) mußte C mindestens 16 + 2 = 18 Punkte haben. D konnte höchstens 4 + 4 + 11 = 19 Punkte haben. Da er C in der Gesamtpunktzahl übertraf, mußte er also 19 Punkte haben und C genau 18 Punkte; als Platzverteilung ergibt sich wieder die unten angegebene.

In beiden Fällen erhalten wir also als einzig mögliche Angaben über die gesuchten Platzziffern:

	Wettkampf 1	2	3
Vom Sieger D belegter Platz	4.	4.	1.
Vom Zweiten C belegter Platz	2.	2.	5.

161043 B) Lösung: 8 Punkte

Die Zahl $x = p$ gehört für kein p zu L, da $\frac{x^2 - p + 3p^2}{x - p}$ für $x = p$ nicht existiert.

Für $x \neq p$ ist die Gleichung äquivalent mit

$$3x^2 - (2p + 3)x + 2p + 3p^2 = 0$$ und dies mit

$$x^2 - \frac{2p + 3}{3}x + \frac{2p + 3p^2}{3} = 0. \qquad (1)$$

Also ist L die Menge aller Zahlen, die der Lösungsmenge M von (1) angehören und von p verschieden sind.

Nun besteht M genau aus 0,1 bzw. 2 Zahlen, wenn in

$$\left(\frac{2p + 3}{6}\right)^2 - \frac{2p + 3p^2}{3} \lesseqgtr 0$$

das obere, mittlere bzw. untere Zeichen gilt. Dies ist jeweils äquivalent mit

$$(2p + 3)^2 - 12(2p + 3p^2) \lesseqgtr 0.$$

$$0 \lesseqgtr p^2 + \frac{3}{8}p - \frac{9}{32}$$

$$0 \lesseqgtr (p + \frac{3}{16} - \frac{9}{16})(p + \frac{3}{16} + \frac{9}{16})$$

$$0 \lesseqgtr (p - \frac{3}{8})(p + \frac{3}{4}).$$

Für $p < -\frac{3}{4}$ und für $p > \frac{3}{8}$ ist daher M leer,

für $p = -\frac{3}{4}$ und für $p = \frac{3}{8}$ enthält M genau eine Zahl,

für $-\frac{3}{4} < p < \frac{3}{8}$ genau zwei Zahlen.

Ferner gehört genau dann p zu M, wenn

$$p^2 - \frac{2p + 3}{3}p + \frac{2p + 3p^2}{3} = 0$$

gilt. Dies ist äquivalent mit

$$4p^2 - p = 0,$$

gilt also genau für $p = 0$ und für $p = \frac{1}{4}$. Genau für diese beiden Werte ist also die Anzahl der Zahlen in L um 1 kleiner als die Anzahl 2 der Zahlen in M.

Somit gilt: a) Genau für alle $p < -\frac{3}{4}$ und alle $p > \frac{3}{8}$ ist L leer,

b) genau für $p = -\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}$ enthält L genau ein Element,

c) genau für alle anderen p besteht L aus mehr als einem Element.

L 10;II XVI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
<u>Lösungen und Punktbewertung</u>
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

161044) Lösung: 6 Punkte

Aus der gegebenen Gleichung erhält man durch äquivalente Umformungen

$$xy + 3x - 2y - 6 = -3,$$
$$x(y+3) - 2(y+3) = -3,$$
$$(x-2)(y+3) = -3.$$

Da ganzzahlige Lösungen gefordert werden, müssen $x - 2$ und $y + 3$ Teiler von -3 sein.

Folgende Fälle sind möglich:

x-2	-3	-1	+1	+3
y+3	+1	+3	-3	-1
x	-1	+1	+3	+5
y	-2	0	-6	-4

und somit

Wie die Probe bestätigt, erfüllen die Zahlenpaare (-1; -2), (1; 0), (3;-6) und (5; -4) die gegebene Gleichung.

<u>Oder:</u> Aus der gegebenen Gleichung erhält man durch äquivalente Umformungen:

$$3x + xy = 2y + 3,$$
$$x(y+3) = 2y + 3 \quad \text{und für } y \neq -3$$

$$y = \frac{y + y + 3}{y+3} = \frac{y}{y+3} + 1.$$

Setzt man $y + 3 = z$ (z ganzzahlig), so erhält man

$$x = \frac{z-3}{z} + 1 = 2 - \frac{3}{z}.$$

Wegen x, z ganzzahlig kommt für z genau eine der Zahlen 3; -3; 1; -1 in Frage.

Man erhält

z	y	x
3	0	1
-3	-6	3
1	-2	-1
-1	-4	5

Tatsächlich erfüllen ...

Für $y = -3$ hat die Gleichung keine Lösung.

161045) Lösung: 7 Punkte

Nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf das Dreieck ABC, gilt:

$$\overline{AB}^2 + a^2 = \overline{AC}^2 = q^2a^2, \quad \text{also } \overline{AB}^2 = a^2(q^2 - 1).$$

Daraus folgt $q > 1$ und $\overline{AB} = a \cdot \sqrt{q^2 - 1}$.

Nach dem Kathetensatz, angewandt auf das Dreieck ABC, erhält man

$a^2 = \overline{CE} \cdot aq$, also $\overline{CE} = \frac{a}{q}$ und somit auch $\overline{AF} = \frac{a}{q}$.

Ferner gilt $\overline{BE}^2 = a^2 - \frac{a^2}{q^2} = \frac{a^2}{q^2}(q^2 - 1)$, also $\overline{BE} = \frac{a}{q} \cdot \sqrt{q^2 - 1}$.

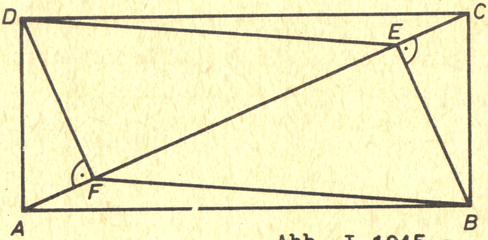

Abb. L 1045 a

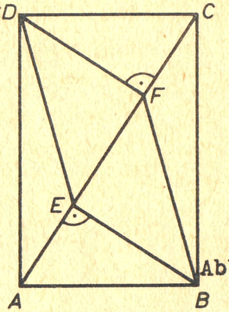

Abb. L 1045 b

Im Fall $\frac{a}{q} < \frac{1}{2}aq$, also $q > \sqrt{2}$, sind AF und CE kürzer als die halbe Diagonale AC, so daß die Punkte auf ihr in der Reihenfolge A, F, E, C angeordnet sind. Daher gilt:

$$\overline{AF} + \overline{FE} + \overline{EC} = \overline{AC}, \quad \text{also } \overline{FE} = \overline{AC} - \overline{AF} - \overline{EC} = aq - 2\frac{a}{q} = \frac{a}{q}(q^2 - 2).$$

Im Fall $\frac{a}{q} \geq \frac{1}{2}aq$, also $q \leq \sqrt{2}$ sind AF und CE nicht kürzer als die halbe Diagonale AC, so daß die Punkte auf ihr in der Reihenfolge A, E, F, C angeordnet sind (für $\frac{a}{q} = \frac{1}{2}aq$ mit $E = F$). Daher gilt in diesem Falle

$\overline{AF} - \overline{FE} + \overline{EC} = \overline{AC}$, also $\overline{FE} = \overline{AF} + \overline{EC} - \overline{AC} = 2\,\frac{a}{q} - aq = \frac{a}{q}\,(2 - q^2)$.

Der Flächeninhalt des Vierecks FBED (das für $\frac{a}{q} = \frac{1}{2}\,aq$ zu einer Strecke entartet) beträgt deshalb

$$2 \cdot \frac{1}{2}\,\overline{FE} \cdot \overline{BE} = \frac{a^2 \cdot |q^2 - 2| \cdot \sqrt{q^2 - 1}}{q^2} .$$

<u>161046) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Der genannte Polyederkörper läßt sich aus den Tetraederkörpern $T_1 = ACF'B'$, $T_2 = CD'F'B'$, $T_3 = ACF'E$ und $T_4 = CD'FE$ zusammensetzen.

Wegen $\overline{AC} = \overline{FD} = \overline{F'D'}$ und $AC \parallel FD \parallel F'D'$ ist $ACD'F'$ ein Parallelogramm, also ist $\triangle ACF' \cong \triangle CD'F'$.

Daher sind T_1 und T_2 volumengleich, ebenso T_3 und T_4.

Sodann gilt $\overline{AC} = \overline{D'F'}$; $\overline{CF'} = \overline{F'C}$; $\overline{F'B'} = \overline{CE}$, und weil $AED'B'$ und $CEF'B$ Parallelogramme sind, $\overline{AB'} = \overline{D'E}$, $\overline{CB'} = \overline{F'E}$.

Daher ist $T_1 \cong T_4$. Also sind alle vier Tetraeder T_1, T_2; T_3, T_4 untereinander volumengleich und daher das gesuchte Volumen V das Vierfache des Volumens von T_2. Faßt man T_2 als Pyramide mit der Grundfläche $B'D'F'$ auf, so ist diese die eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a, und h ist die zugehörige Höhenlänge. Damit ergibt sich

$$V = 4 \cdot \frac{1}{3}\,\frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot h = \frac{1}{3}\,a^2\,h\sqrt{3} .$$

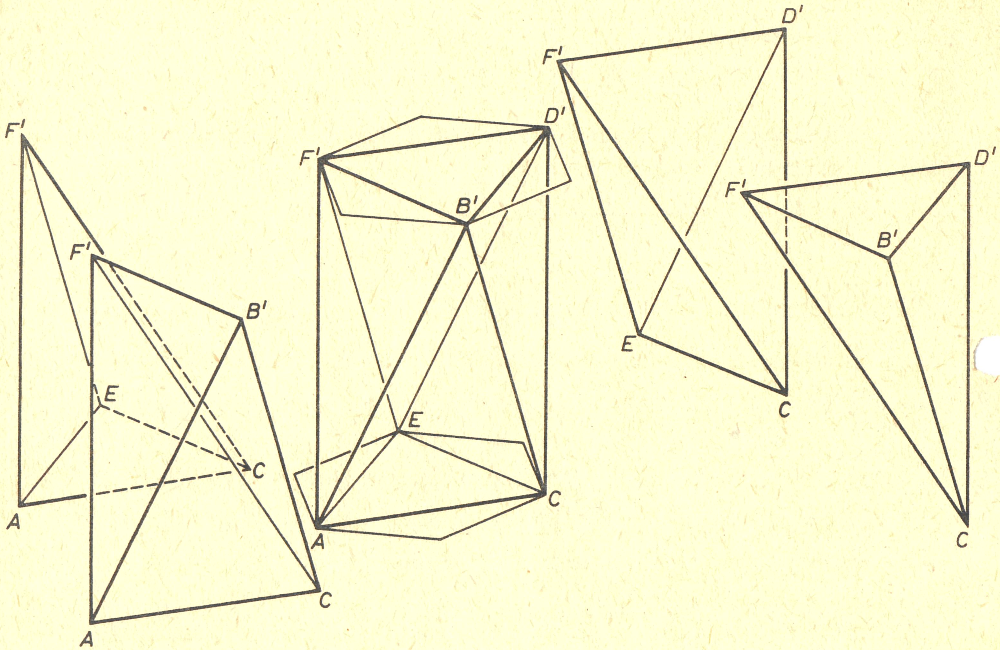

Abb. L 1046