A 10;I

XVI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>161031</u>

In einem Trapez ABCD mit $AB \parallel CD$ und $\overline{AB} > \overline{CD}$ sei a die Länge der Seiten BC, CD und DA. Um die Eckpunkte seien Kreise mit gleichem Radius so gezeichnet, daß

der Kreis um A die Seite AB in H und die Seite AD in E,
der Kreis um B die Seite AB in I und die Seite BC in F,
der Kreis um C die Seite BC in F und die Seite CD in G und
der Kreis um D die Seite CD in G und die Seite AD in E schneide.

Der über HI errichtete Halbkreis berühre die um C und D gezeichneten Kreise von außen in den Punkten N und P.

Ermitteln Sie die Länge der Seite AB!

<u>161032</u>

Von einer Gleichung

$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ werde vorausgesetzt, daß alle Koeffizienten $a_3$, $a_2$, $a_1$ und $a_0$ ganze Zahlen sind.

Beweisen Sie, daß dann folgender Satz gilt:

Wenn eine rationale Zahl x eine Lösung dieser Gleichung ist, so ist x eine ganze Zahl.

30 06 30-1/1ooo/77 (2o4)

A 10;I

161033

Bei dem folgenden Kryptogramm sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß

$$\begin{array}{r} \text{INES} \\ +\ \text{JENS} \\ +\ \text{AMES} \\ \hline \text{N AMEN} \end{array}$$

eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.

a) Zeigen Sie, daß es im dekadischen Zahlensystem keine Lösung der Aufgabe gibt!

b) Zeigen Sie, daß die Aufgabe im System mit der Basis 8 eine Lösung hat, und geben Sie alle Lösungen in diesem System an!

Hinweis: Sind $a_o$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ ganze Zahlen mit $0 \leqq a \leqq 7$ ($i = 0 \dots n$) und $a_n > 0$, so bezeichnet man durch Hintereinanderschreiben $a_n \dots a_2a_1a_o$ im System mit der Basis 8 die Zahl $z = a_n \cdot 8^n + \dots + a_2 \cdot 8^2 + a_1 \cdot 8^1 + a_o \cdot 8^0$. Zur Unterscheidung von der Zahl mit denselben Ziffern im dekadischen Zahlensystem kann man die Zahl z auch mit $z = [a_n \dots a_2a_1a_o]_8$ bezeichnen.

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

161034

Beweisen Sie, daß

$\lg(1 + \frac{1}{1}) + \lg(1 + \frac{1}{2}) + \lg(1 + \frac{1}{3}) + \ldots + \lg(1 + \frac{1}{99}) = 2$ gilt!

161035

Für ein gerades Prisma und eine gerade Pyramide seien folgende Voraussetzungen zugrunde gelegt: Beide Körper haben dieselbe Grundfläche; diese ist ein gleichseitiges Dreieck mit gegebener Seitenlänge a. Die Spitze der Pyramide liegt in der Deckfläche des Prismas.

Man ermittle diejenigen Werte für die (gemeinsame) Höhenlänge h des Prismas (und der Pyramide), für die unter den zugrunde gelegten Voraussetzungen der Mantel des Prismas den gleichen Flächeninhalt wie der Mantel der Pyramide hat.

161036

Konstruieren Sie ein Drachenviereck ABCD mit $\overline{AD} = \overline{CD}$, $\overline{AB} = \overline{CB}$ aus $a + b = 12$ cm, $f = 9$ cm und $\beta + \delta = 172^\circ$!

Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die Länge der Seite AD, f die Länge der Diagonalen BD, $\beta$ die Größe des Winkels $\sphericalangle$ CBA und $\delta$ die Größe des Winkels $\sphericalangle$ ADC.

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob ein solches Drachenviereck existiert und beweisen Sie, daß alle Drachenvierecke, die den Bedingungen der Aufgabe genügen, zueinander kongruent sind!

30 06 30-1/1ooo/77 (2o4)

L 10;I XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

**Lösungen und Punktbewertung**

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

**Achtung:** Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stunfe gelten auch für die 3. Stufe.

**161031) Lösung:** 6 Punkte

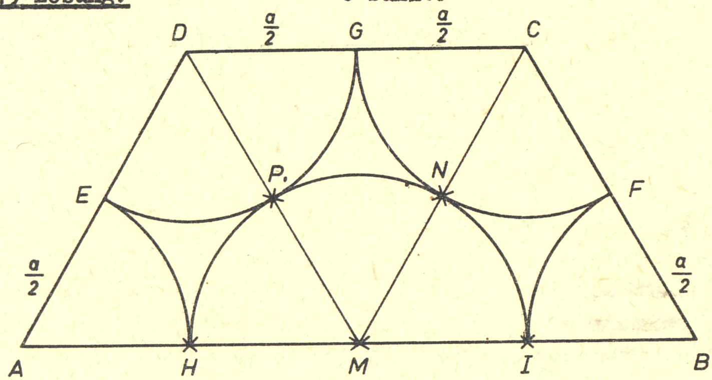


Abb. L 1031

Wegen $\overline{AE} = \overline{ED}$ beträgt der Radius der vier um die Eckpunkte gezeichneten Kreise $\frac{a}{2}$. 1 P.

Sei x die gesuchte Länge der Seite AB, dann gilt $\overline{HI} = x - a$ da wegen $\overline{AB} > \overline{CD}$ der Punkt H zwischen A und I liegt.

Sei M der Mittelpunkt von AB und damit auch von HI, so ist

$\overline{HM} = \frac{x-a}{2}$ der Radius des Halbkreises über HI. 1 P.

Da M, N und C auf derselben Geraden liegen, gilt

$\overline{MC} = \frac{a}{2} + \frac{x-a}{2} = \frac{x}{2}$. Ebenso folgt $\overline{MD} = \frac{x}{2}$, also $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = \overline{MD}$. 1 P.

Somit sind die Dreiecke AMD, DMC und CMB gleichschenklig und wegen (s,s,s) kongruent. 1 P.

Die Winkel $\sphericalangle$ AMD, $\sphericalangle$ DMC und $\sphericalangle$ CMB sind folglich ebenfalls kongruent, und da $\sphericalangle AMD + \sphericalangle DMC + \sphericalangle CMB = 180^\circ$ ist, ist jeder von ihnen $60^\circ$ groß.

Daher sind die genannten Dreiecke gleichseitig, und somit ist $\overline{MA} = \overline{MB} = a$. Die Seite AB hat also die Länge 2a. 1 P. 1 P.

30 06 30-1/1ooo/77 (2o4)

Ansatz des ind. Beweises: 1P.

161032) Lösung: 6 Punkte

Angenommen, eine rationale Zahl x sei eine Lösung der gegebenen Gleichung. Dann gibt es ganze Zahlen $q \neq 0$ und p, die zueinander teilerfremd sind und für die $x = \frac{p}{q}$ ist. Hiernach gilt 1P.

$$\frac{p^4}{q^4} + a_3 \frac{p^3}{q^3} + a_2 \frac{p^2}{q^2} + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0, \text{ also}$$ 1P.

1P.

$p^4 = -q(a_3p^3 + a_2p^2q + a_1pq^2 + a_0q^3)$. Daher ist q ein Teiler von $p^4$.

Da aber q zu p und folglich auch zu $p^4$ teilerfremd ist, ergibt sich, daß q nur +1 oder -1 sein kann. 1P.

Also ist $x = \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl, w.z.b.w. 1P.

161033) Lösung: 8 Punkte

a) Angenommen, es gäbe eine Lösung.
Wir betrachten die einzelnen Spalten der Aufgabe. Es werden jeweils drei einstellige Zahlen (und gegebenenfalls ein Übertrag) addiert. Wegen $3 \cdot 9 = 27$ kann dabei aus der letzten Spalte höchstens ein Übertrag von 2 in die nächstfolgende Spalte erfolgen. Wegen $3 \cdot 9 + 2 = 29$ gilt dies auch für die übrigen Spalten. Daher kommt wegen $I + J + A\ (+Ü) = A + 10\,N$ und $I + J + Ü = 8 + 9 + 2$ für N nur der Wert 1 in Frage. Daraus folgte $S = 7$. Nun müßte in der zweitletzten Spalte $2\,E + 1 + 2 = E + k \cdot 10$ (k ganzzahlig) sein, woraus $E = 7$ folgen würde, im Widerspruch zu $E \neq S$. Daher gibt es im dekadischen System keine Lösung der Aufgabe.

3P.

b) Angenommen, die Aufgabe hat im System mit der Basis 8 eine Lösung. Dann gilt wegen $3 \cdot 7 = [25]_8$, $3 \cdot 7 + 2 = [27]_8$, daß ein möglicher Übertrag in jeder Spalte höchstens 2 betragen kann. Analog wie bei a) folgt daraus $N = 1$. 1P.

Wegen $3 \cdot 0 = 0$, $3 \cdot 1 = 3$, $3 \cdot 2 = 6$
$3 \cdot 3 = [11]_8$, $3 \cdot 4 = [14]_8$, $3 \cdot 5 = [17]_8$,
$3 \cdot 6 = [22]_8$, $3 \cdot 7 = [25]_8$

folgt hieraus $S = 3$. Nun gilt in der vorletzten Spalte 1P.
$2\,E + 1 + 1 = E + k \cdot [10]_8$ (k ganzzahlig), woraus man $E = 6$ und $k = 1$ erhält. In der zweiten Spalte entsteht daher bei Addition von $1 + N + E + M = 1 + 1 + 6 + M$ ein Übertrag von 1.

L 10;I

Die erste Spalte liefert somit $I + J + A + 1 = A + N \cdot [10]_8$, also $I + J + 1 = [10]_8$ bzw. $I + J = 7$. Mit den von N, S, E verschiedenen Ziffern 0, 2, 4, 5, 7 ist dies wegen $I \neq 0$, $J \neq 0$ nur dadurch möglich, daß entweder $I = 2$ und $J = 5$ oder $J = 2$ und $I = 5$ gilt. 1 P.

Damit verbleiben für A ($\neq 0$) nur die Ziffern 4 und 7 und für M nur die von A verschiedenen unter den Ziffern 0, 4 und 7. Die Aufgabe kann also höchstens durch die folgenden Ersetzungen im System mit der Basis 8 gelöst werden.

$$\left[\begin{array}{r} 2163 \\ 5613 \\ 4063 \\ \hline 14061 \end{array}\right]_8 \quad \left[\begin{array}{r} 2163 \\ 5613 \\ 4763 \\ \hline 14761 \end{array}\right]_8 \quad \left[\begin{array}{r} 2163 \\ 5613 \\ 7063 \\ \hline 17061 \end{array}\right]_8 \quad \left[\begin{array}{r} 2163 \\ 5613 \\ 7463 \\ \hline 17461 \end{array}\right]_8$$

1 Lösung: 1 P.
alle " : 1 P.

$$\left[\begin{array}{r} 5163 \\ 2613 \\ 4063 \\ \hline 14061 \end{array}\right]_8 \quad \left[\begin{array}{r} 5163 \\ 2613 \\ 4763 \\ \hline 14761 \end{array}\right]_8 \quad \left[\begin{array}{r} 5163 \\ 2613 \\ 7063 \\ \hline 17061 \end{array}\right]_8 \quad \left[\begin{array}{r} 5163 \\ 2613 \\ 7463 \\ \hline 17461 \end{array}\right]_8$$

Da diese Ersetzungen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen, sind sie die gesuchten Lösungen.

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
**Lösungen und Punktbewertung**
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

**161034) Lösung:** **5 Punkte**

Es gilt nach den Logarithmengesetzen

$$\lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lg(n+1) - \lg(n). \qquad (n > 0)$$ 2 P.

Summiert man nun von n = 1 bis n = 99, so erhält man

$$\lg\left(1 + \frac{1}{99}\right) + \lg\left(1 + \frac{1}{98}\right) + \lg\left(1 + \frac{1}{97}\right) + \ldots + \lg\left(1 + \frac{1}{1}\right) =$$

$$= \lg 100 - \lg 99 + \lg 99 - \lg 98 + \lg 98 - + \ldots - \lg 2 + \lg 2 - \lg 1.$$ 1 P.

$$= \lg 100 + (-\lg 99 + \lg 99) + (-\lg 98 + \lg 98) + \ldots + (-\lg 2 + \lg 2) - \lg 1.$$ 1 P.

In dieser Zeile sind die in den Klammern stehenden Summen jeweils gleich Null. Da lg 1 = 0 und lg 100 = 2 gilt, ist damit die Behauptung bewiesen. 1 P.

**161035) Lösung:** **7 Punkte**

Da die Pyramide gerade ist, liegt ihre Spitze im Schwerpunkt der Deckfläche des Prismas. Der Mantel der Pyramide besteht aus drei zueinander kongruenten gleichschenkligen Dreiecken mit der Basislänge a. Bezeichnet man die Länge der zugehörigen Höhe in diesen Dreiecken mit H, so ergibt sich nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$H^2 = h^2 + \left(\frac{1}{6} a\sqrt{3}\right)^2 = h^2 + \frac{1}{12} a^2.$$ 2 P.

Also hat der Mantel der Pyramide den Flächeninhalt

$$M_1 = \frac{3}{2} a \sqrt{h^2 + \frac{1}{12} a^2}.$$ 1 P.

Der Mantel des Prismas hat den Flächeninhalt

$$M_2 = 3ah.$$ 1 P.

Daher ist wegen $a > 0$ und $h > 0$ die Forderung $M_1 = M_2$ der Reihe nach gleichwertig mit

$$3ah = \frac{3}{2} a\sqrt{h^2 + \frac{1}{12} a^2},$$ 1 P.

$$2h = \sqrt{h^2 + \frac{1}{12} a^2}, \qquad 4h^2 = h^2 + \frac{1}{12} a^2,$$

$$h^2 = \frac{1}{36} a^2,$$

$$h = \frac{1}{6} a.$$ 2 P.

**161036 Lösung:** **8 Punkte**

I. Angenommen, ABCD sei ein Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Dann gilt $\overline{AB} = \overline{BC} = a$ und $\overline{AD} = \overline{CD} = b$. Auf Grund der Symmetrieeigenschaften des Drachenvierecks halbiert die Diagonale BD die Winkel $\sphericalangle CBA$ und $\sphericalangle ADC$. Der Kreis um A mit b schneide die Verlängerung von BA über A hinaus in E. Nach dem Satz über Außenwinkel eines Dreiecks gilt dann

$$\overline{\sphericalangle DAE} = \frac{1}{2}(\beta + \delta).$$

Da $\overline{AE} = \overline{AD}$ nach Konstruktion gilt, ist $\overline{BE} = a + b$. Ferner ist das Dreieck ADE gleichschenklig. Für seine Basiswinkel gilt folglich:

$$\overline{\sphericalangle AED} = \overline{\sphericalangle EDA} = \frac{1}{2} \cdot \left(180^\circ - \frac{1}{2}(\beta+\delta)\right) = 90^\circ - \frac{1}{4}(\beta+\delta).$$ 1 P.

Erzeugung von E: 1 P.

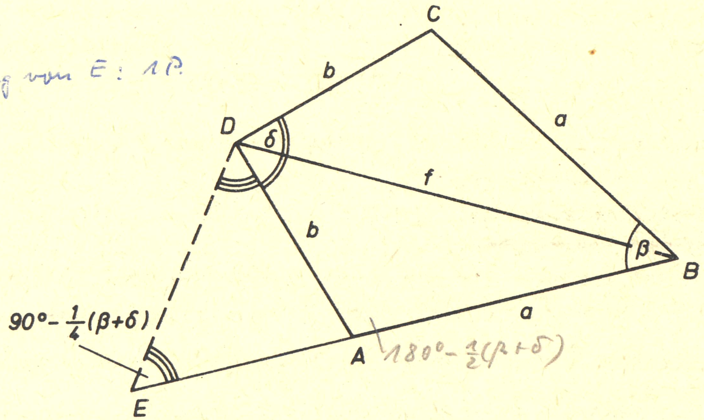


Abb. L 1036

Daraus ergibt sich, daß das Viereck ABCD nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn man es durch folgende Konstruktion erhalten kann.

II. (1) Man zeichnet eine Strecke BE mit der Länge $a + b$.

(2) Man trägt an EB in E einen Winkel der Größe $90^\circ - \frac{1}{4}(\beta + \delta)$ an.

(3) Man zeichnet den Kreis mit f um B. Schneidet der Kreis den freien Schenkel des Winkels, so sei D einer der Schnittpunkte.

Konstruktion mit Beschreibung: 2 P.

Konstruierbarkeit von Δ EBD 1 P.
" von Δ ABD 1 P.

(4) Man trägt an DE in D einen Winkel der Größe

$90^\circ - \frac{1}{4}(\beta+\delta)$ an.

Schneidet sein freier Schenkel die Strecke BE, so sei A der Schnittpunkt.

(5) Man zeichnet die Kreise um D mit $\overline{DA}$ und um B mit $\overline{BA}$. Der Schnittpunkt dieser Kreise in der durch BD bestimmten Halbebene, in der A nicht liegt, sei C genannt.

III. Jedes so konstruierte Viereck ABCD entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

__Beweis:__ Nach Konstruktion gilt $\overline{BD} = f$.

Da an ED gleichgroße Winkel angetragen wurden, folgt, daß das Dreieck EDA gleichschenklig ist. (*)

Nach Konstruktion, Innenwinkelsatz und Außenwinkelsatz eines Dreiecks ergeben sich die folgenden Winkelgrößen:

$\overline{\sphericalangle EAD} = \frac{1}{2}(\beta+\delta)$ und $\overline{\sphericalangle ABD} + \overline{\sphericalangle ADB} = \frac{1}{2}(\beta+\delta)$.

Nach Konstruktion sind die Dreiecke BDA und BDC symmetrisch bezüglich BD. (* *)

Daraus folgt:

$\overline{\sphericalangle CBA} + \overline{\sphericalangle ADC} = \beta+\delta$.

Aus (* * ) folgt, daß das Viereck ABCD ein Drachenviereck mit $\overline{AD} = \overline{CD}$, $\overline{AB} = \overline{CB}$ ist.

1 P.

IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.

Nun gilt laut Aufgabenstellung $f < a + b$, der Winkel $\sphericalangle AED$ liegt also der kleineren Seite gegenüber. Daher ist (3) entweder zweideutig oder eindeutig oder nicht ausführbar.

Mit den gegebenen Größen erhält man bei der Konstruktion des Dreiecks ADE zwei verschiedene Punkte $D_1$ und $D_2$. Danach sind die Konstruktionsschritte (4) und (5) jeweils eindeutig ausführbar.

1 P.

Somit erhält man die beiden Drachenvierecke $A_1BC_1D_1$ und $C_2D_2A_2B$.

Sie sind zueinander (ungleichsinnig) kongruent; denn es gilt:

$\overline{BD_1} = \overline{BD_2} = f$, $\overline{\sphericalangle BA_1D_1} = \overline{\sphericalangle D_2A_2B}$, wegen $A_1D_1 \parallel A_2D_2$ als

Stufenwinkel, weiter gilt $\overline{\sphericalangle BED_1} + \overline{\sphericalangle EBD_1} = \overline{\sphericalangle D_2D_1B}$ (Außenwinkelsatz) sowie $\overline{\sphericalangle ED_1A_2} + \overline{\sphericalangle A_2D_2B} = \overline{\sphericalangle D_1D_2B}$, woraus wegen $\overline{\sphericalangle D_2D_1B} = \overline{\sphericalangle D_1D_2B}$ dann $\overline{\sphericalangle A_1BD_1} = \overline{\sphericalangle A_2D_2B}$ folgt.

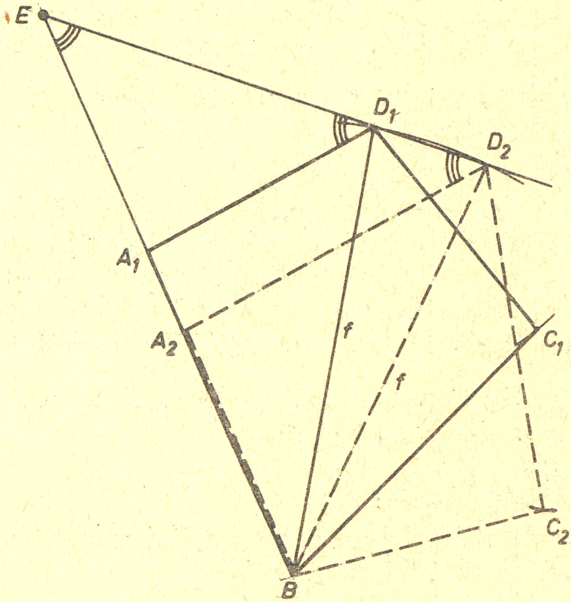


Abb. L 1036 a