XVI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 10

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

161021

Es sei q eine ganze Zahl. Beweisen Sie, daß dann $\frac{q^3 - q}{6}$ ebenfalls eine ganze Zahl ist!

161022

Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC, in dem CD die Höhe auf der Hypotenuse ist, seien die Kathetenlänge $b = \overline{AC} = 4$ cm, und die Länge $p = \overline{BD} = 1{,}8$ cm gegeben.
Man berechne die Längen der restlichen Seiten des Dreiecks, die Höhenlänge $\overline{CD} = h$ und die Länge $q = \overline{AD}$.

161023

In der Aufgabe

$$\begin{array}{r} \text{LQTTQ} \\ +\quad \text{TQTQ} \\ \hline \text{SPIEL} \end{array}$$

sollen gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und ungleiche Buchstaben durch ungleiche Ziffern ersetzt werden, so daß eine im dekadischen Zahlensystem richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten für eine solche Ersetzung!

A 10

161024

Gegeben sei ein Würfel ABCDEFGH (s. Abb. A 1024).
Man ermittle alle verschiedenen Streckenzüge, die lediglich aus Würfelkanten zusammengesetzt sind und folgende Eigenschaften haben:

1. Der Streckenzug beginnt und endet im Punkt A.
2. Bei einmaligem Durchlaufen des Streckenzuges wird jeder Eckpunkt eines Würfels genau einmal erreicht.

Dabei gelten zwei Streckenzüge genau dann als verschieden, wenn es eine Würfelkante gibt, die in einem der beiden Streckenzüge vorkommt, in dem anderen aber nicht. Insbesondere gelten Streckenzüge, die sich nur in der Durchlaufungsrichtung unterscheiden, nicht als verschieden.

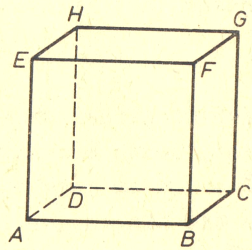

Abb. A 1024

L 10 XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

161021) Lösung: **7 Punkte**

Es gilt $q^3 - q = q(q^2 - 1) = q(q - 1)(q + 1)$.
Von den drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $q - 1$, q, $q + 1$ ist stets eine durch 2 und eine durch 3 teilbar. Mithin ist ihr Produkt $q^3 - q$ durch 6 teilbar, d. h. $\frac{q^3 - q}{6}$ ist eine ganze Zahl.

161022) Lösung: **11 Punkte**

Für die gesuchten Längen $a = \overline{BC}$, $c = \overline{AB}$, h, q gilt

(1) $m^2 + b^2 = c^2$ (nach dem Satz des Pythagoras),
(2) $cq = b^2$ (nach dem Kathetensatz),
(3) $pq = h^2$ (nach dem Höhensatz),
(4) $p + q = c$ (da D auf AB liegt).

Aus (2), (4) folgt

$q^2 + pq - b^2 = 0$. Für die Maßzahl x der in cm gemessenen Länge q gilt daher $x^2 + 1,8\,x - 16 = 0$ sowie $x > 0$.

Da die quadratische Gleichung genau die Lösungen

$x_{1,2} = -0,9 \pm \sqrt{0,81 + 16} = -0,9 \pm 4,1$ hat, folgt $q = 3,2$ cm.

Hieraus und aus (4) erhält man $c = (3,2 + 1,8)\text{cm} = 5$ cm.

Aus (1) und $a > 0$ folgt hiernach $a = \sqrt{25 - 16}$ cm $= 3$ cm;

aus (3) und $h > 0$ folgt $h = \sqrt{1,8 \cdot 3,2}$ cm $= 2,4$ cm.

161023) Lösung: **11 Punkte**

1) Angenommen, eine Ersetzung habe die verlangten Eigenschaften. Die Spalten seien von rechts nach links mit 1 bis 5 numeriert. Wegen $L \neq S$ folgt aus Spalte 5
(1) $L + 1 = S$

und damit aus Spalte 4 zunächst

(2) $Q + T \geqq 9$.

Wäre nun $T \geqq 5$, so ergäbe sich aus Spalte 2 ein Zehnerübertrag, also wegen (2) auch aus Spalte 3, und aus den Spalten 3 und 4 folgte $I = P$.

Also ist

(3) $T \leqq 4$,

in Spalte 2 entsteht kein Zehnerübertrag; wegen $I \neq P$ muß folglich in Spalte 3 ein Übertrag entstehen, d. h., es gilt sogar

(2a) $Q + T \geqq 10$,

wegen (3) also

(4) $Q \geqq 6$.

Daher verbleiben nur folgende Möglichkeiten:

a) Es ist $Q = 9$; dann folgt (aus Spalte 1) $L = 8$ und wegen (1) $S = 9$. Wegen $Q \neq S$ ist dies ein Widerspruch.

b) Es ist $Q = 8$; dann folgt (aus Spalte 1) $L = 6$ und wegen (1) $S = 7$. Wegen (2a) und (3) gibt es nur die Möglichkeiten $T = 2$ oder $T = 3$ oder $T = 4$.
Ist $T = 2$, dann folgt $E = 5$, $I = 0$, $P = 1$.
Ist $T = 3$, dann folgt $E = 7$, im Widerspruch zu $S = 7$.
Ist $T = 4$, dann folgt $E = 9$, $I = 2$, $P = 3$.

c) Es ist $Q = 7$; dann folgt (aus Spalte 1) $L = 4$ und wegen (1) $S = 5$. Wegen (2a) und (3) gibt es nur die Möglichkeiten $T = 3$ oder $T = 4$. Davon scheidet $T = 4$ wegen $L = 4$ aus, und ist $T = 3$, dann folgt $E = 7$, im Widerspruch zu $Q = 7$.

d) Es ist $Q = 6$; dann folgt (aus Spalte 1) $L = 2$ und wegen (1) $S = 3$. Wegen (2a) und (3) kann nur noch $T = 4$ gelten, dann folgt $E = 9$, $I = 0$, $P = 1$.

Daher können nur die Ersetzungen

$$\begin{array}{r} 68228 \\ +\ 2828 \\ \hline 71056 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 68448 \\ +\ 4848 \\ \hline 73296 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 26446 \\ +\ 4646 \\ \hline 31092 \end{array}$$

die geforderten Eigenschaften haben.

2) Sie haben diese Eigenschaften; denn in jeder von ihnen wurden für L, Q, T, S, P, I, E verschiedene Ziffern eingesetzt, und es ist jeweils eine im dekadischen Zahlensystem richtig gerechnete Additionsaufgabe entstanden.

161024) Lösung: 11 Punkte

Jeder der gesuchten Streckenzüge muß genau zwei von A ausgehende Würfelkanten enthalten, also genau zwei der drei Kanten AB, AD, AE. Die Durchlaufung kann so gewählt werden, daß er entweder mit AB oder mit AD beginnt.

1. Beginnt er mit AB, so kann er nur mit einer der übrigen beiden von B ausgehenden Würfelkanten fortgesetzt werden, also entweder als ABC oder als ABF.

1.1. Nach der Fortsetzung ABC verbleiben ebenso nur die Möglichkeiten ABCD und ABCG.

1.1.1 Bei der Wahl von ABCD gibt es sowohl von A als auch von D aus nur noch je eine Möglichkeit der Weiterführung, nämlich zu E bzw. H hin. Von diesen beiden Punkten verbleibt wiederum nur noch je eine Möglichkeit, nämlich zu F bzw. G hin. Dann sind alle Punkte erfaßt, und der Streckenzug kann nur noch durch die Strecke FG geschlossen werden. Also gibt es im Fall 1.1.1 nur die Möglichkeit
A B C D H G F E A

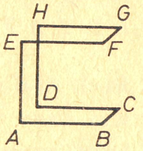

Abb. L 1024 a

1.1.2 Angenommen, bei der Wahl von ABCG könnte auf G nun H folgen. Dann gäbe es, um über einen noch nicht erfaßten Punkt zu F zu gelangen, nur die Fortsetzung ABCGHEF, und der nun noch verbleibende Punkt D ließe sich nur auf dem Wege über einen bereits erfaßten Punkt erreichen, da F und D nicht Endpunkte einer gemeinsamen Würfelkante sind. Wegen dieses Widerspruches kann auf ABCG nur F folgen, und als einzige Möglichkeit der Fortsetzung schließt sich an:
A B C G F E H D A

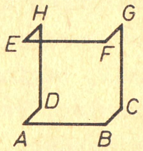

Abb. L 1024 b

1.2 Nach der Fortsetzung ABF verbleiben nur die Möglichkeiten ABFE, ABFG.

1.2.1 Zu ABFE existiert wie in 1.1.1 nur die Fortsetzung

A B F E H G C D A

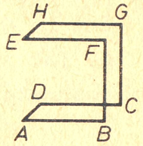

Abb. L 1024 c

1.2.2 Zu ABFG existiert mit analoger Begründung wie in 1.1.2 nur die Fortsetzung

A B F G C D H E A

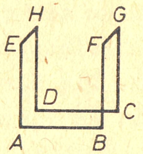

Abb. L 1024 d

2. Beginnt der Streckenzug mit AD, so kann er nur als ADC oder ADH fortgesetzt werden.

2.1 Nach ADC gibt es nur die Fortsetzungen ADCB und ADCG. Zu jeder von ihnen existiert wie in 1.1.1 bzw. 1.1.2 nur eine Weiterführung. Da ein mit ADCG beginnender Streckenzug bereits in 1.2.1 vorkommt, verbleibt außer ihm nur die Weiterführung von ADCB, d. i.:

A D C B F G H E A

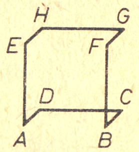

Abb. L 1024 e

2.2 Nach ADH gibt es nur ADHE und ADHG und dazu wieder nur je eine Weiterführung. Davon kommt ADHE bereits in 1.1.2 vor, und es verbleibt nur

A D H G C B F E A.

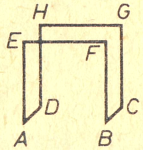

Abb. L 1024 f

Damit ist gezeigt, daß nur die sechs aufgezählten Streckenzüge den Forderungen der Aufgabe genügen können. Sie erfüllen in der Tat diese Forderungen; denn jeder enthält jede der Würfelecken genau einmal, beginnt und endet mit A und verläuft nur längs der Würfelkanten. Ferner sind die Streckenzüge sämtlich verschieden voneinander, wie folgende Tabelle ausweist. Darin ist zu je zwei der genannten Streckenzüge eine Würfelkante angegeben, die in dem einen Streckenzug vorkommt, in dem anderen aber nicht.

L 10

	1.1.2	1.2.1	1.2.2	2.1	2.2
1.1.1	CD	BC	BC	AB	AB
1.1.2		BC	BC	AB	AB
1.2.1			FE	AB	AB
1.2.2				AB	AB
2.1					DC