A 9;I

XVI. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

**Achtung:** Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

## 160931

Ein dem Einheitskreis einbeschriebenes n-Eck habe die Eigenschaft daß es bei einer Drehung um $180^\circ$ um den Mittelpunkt des Einheitskreises in sich übergeht. Auf der Peripherie des Einheitskreises sei irgendein Punkt P gegeben.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen aus der gegebenen Zahl n die Summe s der Quadrate der Abstände des Punktes P zu allen Punkten des n-Ecks!

## 160932

Man beweise folgenden Satz:

Sind a und b positive reelle Zahlen, für die $ab = 1$ gilt, dann gilt $(a + 1)(b + 1) \geqq 4$. (*)

Untersuchen Sie ferner, in welchen Fällen in (*) das Gleichheitszeichen gilt.

30 06 30-1/1000/77 (204)

A 9;I

160933

Wir betrachten die Menge aller Tetraeder, für die folgendes gilt:

(1) Eine der Flächen des Tetraeders ist die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks.

(2) Von den Kanten des Tetraeders haben drei die (gegebene) Länge a und drei die Länge $\cancel{4\sqrt{2}.}$ $a \cdot \sqrt{2}$

a) Zeigen Sie, daß zwei zueinander nicht kongruente Tetraeder existieren, die dieser Menge angehören!

b) Geben Sie für jedes dieser beiden Tetraeder den Oberflächeninhalt an!

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

## 160934

Beweisen Sie, daß für keine Primzahl $p \neq 3$ und für keine natürliche Zahl $n \geqq 1$ die Zahl $(3n - 1)p^2 + 1$ Primzahl ist.

## 160935

Es sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck. Von allen Geraden, die die Fläche des Dreiecks ABC in zwei Teilflächen zerlegen, seien diejenigen Geraden ausgewählt, die zwei zueinander inhaltsgleiche Teilflächen erzeugen.

Untersuchen Sie, ob es einen Punkt P gibt, durch den alle diese Geraden gehen.

## 160936

Zwei Holzleisten sind so aneinander geleimt, daß sie einen rechten Winkel bilden. In diesen rechten Winkel ist eine kreisförmige Pappscheibe P gelegt, die beide Schenkel des rechten Winkels berührt; der Radius R dieser Scheibe ist bekannt (Abb. A 936)

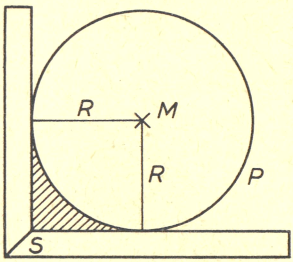

Abb. A 936

In den durch Schraffur gekennzeichneten Teil zwischen dem rechten Winkel und der Pappscheibe P soll eine weitere Pappscheibe gelegt werden, die die Schenkel des rechten Winkels und die Scheibe P berührt.

a) Man zeige: Es gibt genau einen Punkt für die Lage des Mittelpunktes der zweiten Pappscheibe.

b) Man ermittle den Radius dieser Pappscheibe.

30 06 30-1 /1ooo/ 77 (2o4)

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
**Lösungen und Punktbewertung**
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

**Achtung:** Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

**160931) Lösung:** **6 Punkte**

1 P.

Wegen der vorausgesetzten Eigenschaft ist n gerade; zu jedem der Endpunkte gibt es einen anderen, der bezüglich des Mittelpunktes M des Einheitskreises spiegelbildlich zu ihm liegt. Wir können daher die Eckpunkte so mit $P_i$ und $\overline{P_i}$ $(i = 1, \ldots, \frac{n}{2})$ bezeichnen, daß $P_i$ und $\overline{P_i}$ jeweils spiegelbildlich zueinander liegen. 1 P.

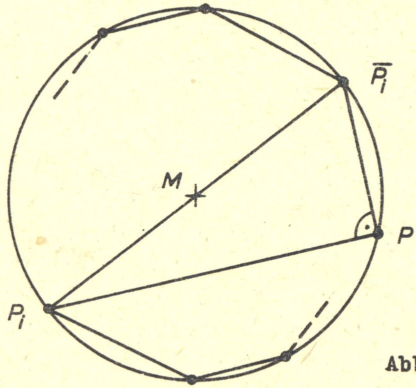


Abb. L 931

Es läßt sich nun zeigen, daß für alle $i = 1, \ldots, \frac{n}{2}$

(1) $\overline{PP_i}^2 + \overline{P\overline{P_i}}^2 = 4$ 2 P.

gilt. Ist nämlich $P \neq P_i$ oder $P \neq \overline{P_i}$, so gilt (1) nach der Umkehrung des Satzes des Thales sowie nach dem Lehrsatz des Pythagoras. Ist aber $P = P_i$ oder $P = \overline{P_i}$, so gilt $\overline{PP_i}^2 = 0$ und 1 P.

$\overline{P\overline{P_i}}^2 = \overline{P_i\overline{P_i}}^2 = 4$ bzw. $\overline{P\overline{P_i}}^2 = 0$ und $\overline{PP_i}^2 = \overline{P_i\overline{P_i}}^2 = 4$, d. h. (1) gilt auch in diesem Falle.

Daher ist die zu berechnende Summe

$$s = \frac{n}{2} \cdot 4 = 2n.$$ 1 P.

30 06 30-1/1ooo/77 (2o4)

**160932) Lösung:** **6 Punkte**

Die Ungleichung (*) ist gleichbedeutend mit

$a + ab + b + 1 \geqq 4$, d. h. wegen $ab = 1$ mit

$a + 1 \quad + b + 1 \geqq 4$, oder gleichbedeutend hiermit

$$a + b \geqq 2.$$ 2 P.

Nun gilt für alle reellen Zahlen a

(1) $(a - 1)^2 \geqq 0$, also 1 P.

$a^2 - 2a + 1 \geqq 0$,

$a^2 + 1 \geqq 2a$. 1 P.

Wegen $a > 0$ folgt daraus durch Division

$a + \frac{1}{a} \geqq 2$, woraus man wegen $b = \frac{1}{a}$

$a + b \geqq 2$ erhält, w.z.b.w. 1 P.

Folglich gilt (*) für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $ab = 1$. Damit ist der Satz bewiesen.

Das Gleichheitszeichen gilt in (*), da es in (1) genau für $a = 1$ gilt, genau für $a = b = 1$. 1 P.

**160933) Lösung:** **7 Punkte**

a) Da eine der Flächen die eines gleichseitigen Dreiecks sein soll und da genau zwei unterschiedliche Kantenlängen auftreten, sind folgende Fälle möglich:

1. Tetraeder: 1 P.

**Fall 1:** Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a. Auf der Ebene durch A, B und C werde im Schwerpunkt A von ABC die senkrechte Gerade errichtet und auf ihr ein Punkt D mit $\overline{SD} = a\sqrt{\frac{5}{3}}$ gewählt. Wegen $\overline{AS} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = a \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$ gilt dann nach dem Satz von Pythagoras in dem rechtwinkligen Dreieck ASD, daß $\overline{AD} = a\sqrt{\frac{5}{3} + \frac{1}{3}} = a \cdot \sqrt{2}$ ist. Ebenso folgt $\overline{BD} = a \cdot \sqrt{2}$ und $\overline{CD} = a \cdot \sqrt{2}$. Daher ist ABCD ein Tetraeder mit

1 P. $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a$ und $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} = a \cdot \sqrt{2}$.

2. Tetraeder: 1 P.

**Fall 2:** Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $a\sqrt{2}$. Auf der Ebene durch A, B und C werde im Schwerpunkt S von ABC die senkrechte Gerade errichtet und auf ihr ein Punkt D mit $\overline{SD} = a \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$ gewählt.

$\overline{AS} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ gilt dann nach dem Satz von

Pythagoras in dem rechtwinkligen Dreieck ASD, daß

$\overline{AD} = a \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = a$ ist. Daher ist ABCD ein Tetraeder mit

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a\sqrt{2}$ und $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} = a$. 1 P.

Da in jedem dieser beiden Tetraeder eine Fläche auftritt, die bei dem anderen nicht vorkommt, sind sie zueinander nicht kongruent. 1 P.

b) Die Oberfläche des ersten Tetraeders besteht aus einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a und drei gleichschenkligen Dreiecken, in denen jeweils die Basis die Länge a und die Schenkel die Länge $a\sqrt{2}$ haben. Deren Höhe ist

$a\sqrt{2 - \frac{1}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{7}$.

Somit hat dieses Tetraeder den Oberflächeninhalt

$$O_1 = \frac{1}{4} a^2\sqrt{3} + \frac{3}{4} a^2\sqrt{7} = \frac{1}{2} a^2 (\sqrt{3} + 3\sqrt{7}).$$ 1 P.

Die Oberfläche des zweiten Tetraeders besteht aus einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge $a\sqrt{2}$ und drei gleichschenkligen Dreiecken, in denen jeweils die Basis die Länge $a\sqrt{2}$ und die Schenkel die Länge a haben. Diese Dreiecke sind also gleichschenklig-rechtwinklig; ihr Flächeninhalt ist $\frac{1}{2} a^2$.
Somit hat dieses Tetraeder den Oberflächeninhalt

$$O_2 = \frac{1}{4} \cdot (a\sqrt{2})^2\sqrt{3} + \frac{3}{2} a^2 = \frac{1}{2} a^2 (3 + \sqrt{3}).$$ 1 P.

Anmerkung: Die Inkongruenz der beiden Tetraeder kann auch aus der Verschiedenheit ihrer Oberflächeninhalte geschlossen werden.

L 9;II XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

**Lösungen und Punktbewertung**

Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

**160934) Lösung:** **6 Punkte**

Wegen $n \geqq 1$ und $p \geqq 2$ gilt Zahl > 3, z ≠ 3 1P.

(1) $(3n - 1)p^2 + 1 \geqq 9.$

Wegen $p \neq 3$ und da p Primzahl ist, gibt es entweder eine natürliche Zahl m mit $p = (3m + 1)$ oder eine natürliche Zahl m mit $p = (3m - 1)$. 1P.

$$\text{Aus}\quad \underbrace{(3n-1)(3m+1)^2}_{1\,P.} + 1 = 27nm^2 + 18nm + 3n - 9m^2 - 6m = 3(9nm^2 + 6nm + n - 3m^2 - 2m)$$

$$\text{bzw.}\quad \underbrace{(3n-1)(3m-1)^2}_{1\,P.} + 1 = 27nm^2 - 18nm + 3n - 9m^2 + 6m = 3(9nm^2 - 6nm + n - 3m^2 + 2m)$$

folgt daher in beiden Fällen, daß die zu untersuchende Zahl durch 1P. 3 teilbar ist. Wegen (1) kann sie somit keine Primzahl sein. 1P.

**160935) Lösung:** **7 Punkte**

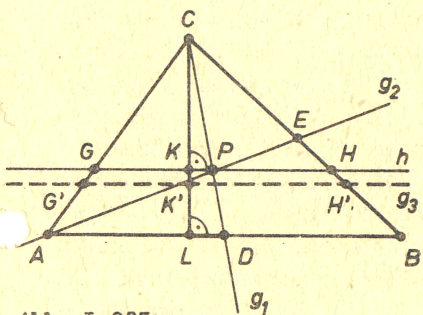


Abb. L 935

Die Gerade $g_1$ gehe durch die Punkte C und D, wobei D der Mittelpunkt der Seite AB sei. Dann erfüllt $g_1$ die Bedingung; denn wegen $\overline{AD} = \overline{DB}$ und der gleichen Höhe sind die Dreiecke ACD und BCD flächengleich. Seitenhalbierende: 1 Begründung: 1

Die Gerade $g_2$ gehe durch die Punkte A und E, wobei E der Mittelpunkt der Seite BC sei. Dann erfüllt (Beweis wie oben) $g_2$ ebenfalls die Bedingung.

Der Schnittpunkt P von $g_1$ und $g_2$ ist der Schwerpunkt des Dreiecks, 1P. da $g_1$ und $g_2$ die Seitenhalbierenden durch C bzw. A enthalten, und es gilt $\overline{PC} = 2\,\overline{PD}$ bzw. $\overline{CP} : \overline{CD} = 2 : 3$.

Die Gerade h gehe durch P und sei zu AB parallel. Ihre Schnittpunkte mit den Seiten AC bzw. BC seien G bzw. H. Die Fußpunkte ~~punkt 1P.~~

30 06 30-1 /looo/77 (2o4)

des Lotes von C auf h bzw. auf die Gerade durch A und B seien K bzw. L. Dann gilt nach dem Strahlensatz

$$\overline{CK} = \frac{2}{3}\,\overline{CL}.$$

1 P. Die Gerade $g_3$ sei parallel zu AB und gehe durch denjenigen Punkt K' auf CL, für den $\overline{CK'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{CL}$ gilt. Ihre Schnittpunkte mit AC bzw. BC seien G' bzw. H'. Dann gilt nach dem Strahlensatz $\overline{G'H'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{AB}$.

Also hat $\triangle G'H'C$ den Flächeninhalt

1 P. $\frac{1}{2}\,\overline{G'H'} \cdot \overline{CK'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{AB} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{CL} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\,\overline{AB} \cdot \overline{CL}$, d. h. den halben Flächeninhalt von $\triangle ABC$. Daher erfüllt $g_3$ die in der Aufgabe genannte Bedingung. Wegen $K' \neq K$ sind die Parallelen $g_3$ und h

2 P. voneinander verschieden; sie haben also keinen Punkt gemeinsam. Also geht $g_3$ nicht durch P.

Somit ist gezeigt, daß es keinen Punkt P gibt, durch den alle beschriebenen Geraden gehen.

160936) Lösung: 8 Punkte

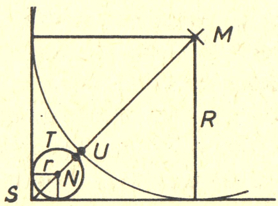


Abb. L 936

Berührt ein Kreis die beiden Schenkel eines Winkels, dann liegt sein Mittelpunkt auf der Halbierenden dieses Winkels. Daher ist SM die Halbierende des rechten Winkels, und es sind lediglich Pappscheiben zu betrachten, deren Mittelpunkt auf SM liegt und die die Schenkel berühren. 1 P.

Es sei r der Radius einer solchen Pappscheibe, und sie berühre die beiden Schenkel des rechten Winkels; ihr Mittelpunkt sei N, und T sei der auf SM liegende Randpunkt, der nicht zwischen S und N liegt (Abb. L 936). Dann gilt:

2 P. $\overline{ST} = r\sqrt{2} + r = (\sqrt{2} + 1)\,r$ bzw. $\overline{SN} = r\sqrt{2}$, weil die Größe der Winkel zwischen der Winkelhalbierenden und einem der Schenkel $45^\circ$ beträgt. Ist nun U der auf SM gelegene Randpunkt der Scheibe P, der zwischen S und M liegt, dann ist

2 P. $\overline{SU} = R\sqrt{2} - R = (\sqrt{2} - 1)R.$

L 9;II

Die Scheibe mit dem Radius r berührt die Schenkel des rechten Winkels und die Scheibe P genau dann, wenn $\overline{NM} = r + R$ ist; denn auf Grund der Voraussetzungen der Aufgabe müssen sich die beiden Kreise von außen berühren. 1P.

Da im vorliegenden Fall $\overline{NM} = \overline{SM} - \overline{SN} = (R - r)\sqrt{2}$ ist, erhält man $R\sqrt{2} - r\sqrt{2} = R + r$, woraus eindeutig

$r = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}R$ folgt. 1P.

Der Mittelpunkt der Scheibe mit dem so ermittelten Radius r ist mithin der auf SM liegende Punkt N, für den $\overline{SN} = r\sqrt{2}$ gilt. 1P.