XVI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklasse 9

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

160921

Karlheinz betrachtet die in Abb. A 921 dargestellte, aus drei kongruenten Rhomben bestehende Figur. Dabei stellt er fest, daß der Winkel $\sphericalangle BSG$ genau so groß ist wie jeder der Winkel $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle DAE$, $\sphericalangle EAG$. Nach einigem Nachdenken behauptet er, daß der folgende Satz gilt: "Sind zwei Parallelogramme ABCD und AEFG, die genau den Punkt A gemeinsam haben, so gegeben, daß die Winkel $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle DAE$ und $\sphericalangle EAG$ gleichgroß und kleiner als 120° sind, dann hat auch der Winkel $\sphericalangle BSG$, den die Gerade g_1 durch B und C mit der Geraden g_2 durch F und G einschließt, die gleiche Größe wie jeder dieser drei Winkel."

Beweisen Sie diesen Satz!

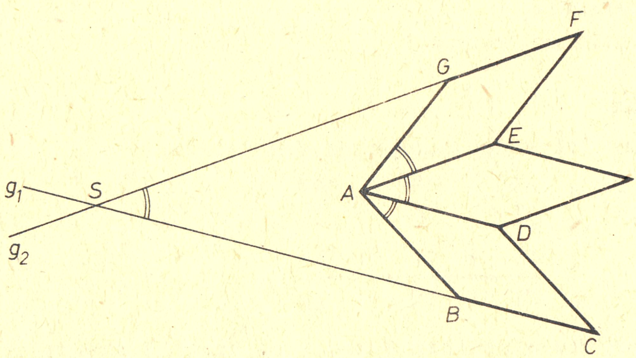

Abb. A 921

160922

Die Zahl $\frac{20}{21}$ soll so in zwei Summanden zerlegt werden, daß

a) die beiden Summanden Brüche mit gleichem, von 21 verschiedenem Nenner und mit unterschiedlichen Zählern sind,

b) die beiden Summanden Brüche mit gleichem Zähler und mit unterschiedlichen Nennern sind.

Dabei sollen in jedem Bruch, der als Summand auftritt, jeweils der Zähler und der Nenner natürliche Zahlen sein, die zueinander teilerfremd sind.
Geben Sie für a) und b) je ein Beispiel einer derartigen Zerlegung an und weisen Sie nach, daß es alle verlangten Eigenschaften hat!

160923

Gegeben sei ein Würfel ABCDA'B'C'D' (Abb. A 923). Wir betrachten alle geschlossenen Streckenzüge XYZTX, wobei X, Y, Z und T in dieser Reihenfolge beliebige innere Punkte der Kanten AA', BB', CC' bzw. DD' seien.

Untersuchen Sie, ob es eine Lage derartiger Punkte X, Y, Z, T so gibt, daß der Streckenzug XYZTX unter allen betrachteten Streckenzügen
a) minimale
b) maximale
Gesamtlänge besitzt!

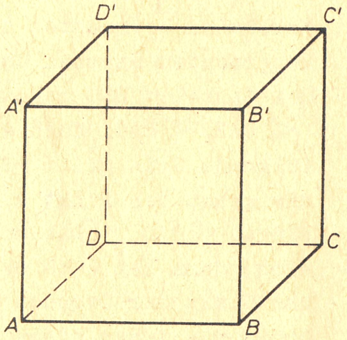

Abb. A 923

160924

In der folgenden Anordnung von Zeichen

ab	X	ab	=	cad
Y		Y		Z
ae	X	ae	=	ffe
ff	Y	ff	=	gg

sollen die einzelnen Symbole so durch Elemente des jeweiligen Grundbereichs ersetzt werden, daß jeweils wahre Aussagen entstehen.

A 9

Dabei ist der Grundbereich für die Kleinbuchstaben b, d, e die Menge der Ziffern von 0 bis 9, für a, c, f, g die Menge der Ziffern von 1 bis 9, und der Grundbereich für die Großbuchstaben X, Y, Z ist die Menge der Operationszeichen "+", "-", "." und ":". Gleiche Symbole bedeuten dabei gleiche, verschiedene Symbole verschiedene Elemente des jeweiligen Grundbereichs.

Untersuchen Sie, ob eine solche Ersetzung möglich ist, und ermitteln Sie, wenn dies zutrifft, alle Ersetzungen mit den geforderten Eigenschaften!

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

160921) Lösung: 8 Punkte

Es sei h die Gerade durch A und E. Dann gilt $h \parallel g_2$, da AEFG ein Parallelogramm ist. Folglich schneidet die zu g_2 nicht parallele Gerade g_1 die Geraden g_2 und h in S bzw. P (Abb. L 921).

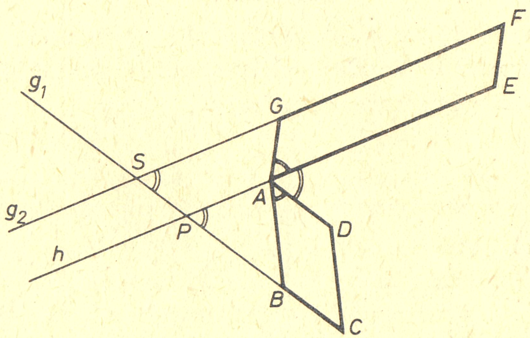

Abb. L 921

Nun sind $\sphericalangle BPA$ und $\sphericalangle BSG$ Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und daher gleichgroß. Ebenso sind $\sphericalangle DAE$ und $\sphericalangle BPA$ Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und mithin gleichgroß. Folglich ist der Winkel $\sphericalangle BSG$, den g_1 mit g_2 einschließt, genau so groß wie jeder der Winkel $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle DAE$, $\sphericalangle EAG$.
Damit ist der Satz bewiesen.

160922) Lösung: 10 Punkte

a) Die Zerlegung $\frac{20}{21} = \frac{11}{42} + \frac{29}{42}$ beispielsweise hat alle verlangten Eigenschaften.
Beweis: Die beiden Summanden haben denselben, von 21 verschiedenen Nenner 42 sowie die unterschiedlichen Zähler 11 und 29.

In $\frac{11}{42}$ sind Zähler und Nenner die teilerfremden natürlichen Zahlen 11 und 42, in $\frac{29}{42}$ die teilerfremden natürlichen Zahlen 29 und 42.

b) Die Zerlegung $\frac{20}{21} = \frac{2}{3} + \frac{2}{7}$ beispielsweise hat alle verlangten Eigenschaften.

Beweis: Die beiden Summanden haben denselben Zähler 2 sowie die unterschiedlichen Nenner 3 und 7. In $\frac{2}{3}$ sind Zähler und Nenner die teilerfremden natürlichen Zahlen 2 und 3, in $\frac{2}{7}$ die teilerfremden natürlichen Zahlen 2 und 7.

Korrekturhinweis: Laut Aufgabentext wird eine Beschreibung der Ermittlung der Zerlegung nicht verlangt.

160923) Lösung: 10 Punkte

Die Gesamtlänge der Streckenzüge wird nicht verändert, wenn wir den "Mantel" aus den vier zu AA' parallelen Seitenflächen des Würfels wie folgt in die Ebene abwickeln:

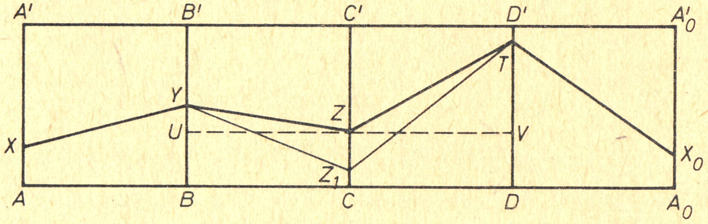

Abb. L 923

Für den dabei zweimal (als X und X_0) auftretenden Punkt X gilt $XX_0 \parallel AA_0$.

a) Zu jedem solchen X ergibt sich als Möglichkeit für Y, Z, T mit minimaler Gesamtlänge von $XYTZX_0$ die Wahl von Y, Z, T auf der Strecke XX_0, da diese die kürzeste Verbindung zwischen X und X_0 ist und da die so bestimmten Punkte Y, Z, T wegen $\overline{AX} = \overline{BY} = \overline{CZ} = \overline{DT} = \overline{A_0X_0}$ im Innern von BB', CC' bzw. DD' liegen. Die so zu je einem X gehörende minimale Gesamtlänge von $XYZTX_0$ ist $\overline{XX_0} = \overline{AA_0}$, also für alle X dieselbe Länge. Daher ist dies unter allen betrachteten Streckenzügen überhaupt die minimale Gesamtlänge, deren Existenz somit nachgewiesen ist.

b) Es sei XYZTX ein beliebiger zu betrachtender Streckenzug. Für ihn sei durch geeignete Wahl in der Reihenfolge der Bezeichnungen A, B, C, D sowie gleichzeitig A', B', C', D' und X, Y, Z, T erreicht, daß $\overline{CZ} \leqq \overline{BY}$ und $\overline{CZ} \leqq \overline{DT}$ gilt. Nach der Abwicklung schneidet die Parallele zu AA_0 durch Z dann BB' und CC' in Punkten U bzw. V auf BY bzw. DT. Daher ist $\sphericalangle CZY \geqq \sphericalangle CZU = 90^\circ$ und $\sphericalangle CZT \geqq \sphericalangle CZV = 90^\circ$. Wählt man nun einen Punkt Z_1 zwischen C und Z, so gehört auch XYZ_1TX zu den betrachteten Streckenzügen. Ferner ist im Dreieck Z_1ZY der Innenwinkel bei Z größer als der bei Z_1, also gilt $\overline{YZ_1} > \overline{YZ}$.

Ebenso folgt $\overline{Z_1T} > \overline{ZT}$. Daher hat XYZ_1TX eine größere Gesamtlänge als XYZTX. Folglich gibt es unter den betrachteten Streckenzügen keinen mit maximaler Gesamtlänge.

<u>160924) Lösung:</u> <u>12 Punkte</u>

1) Angenommen, eine Ersetzung habe die geforderten Eigenschaften. Dann kann X nicht für das Pluszeichen stehen; denn wenn die Summe zweier zweistelliger Zahlen eine dreistellige Zahl ist, dann muß deren erste Ziffer eine 1 sein; die Ergebnisse von

ab X ab = cad und

ae X ae = ffe

beginnen jedoch mit verschiedenen Ziffern.

Da ferner weder die Differenz noch der Quotient zweier zweistelliger Zahlen eine dreistellige Zahl ergeben kann, kann X auch keins der Zeichen "-" oder ":" bedeuten. Daraus folgt

(1) X steht für das Zeichen "." .

Aus ff Y ff = gg folgt wegen ff - ff = 0 und ff : ff = 1, daß Y weder das Zeichen "-" noch das Zeichen ":" bedeuten kann.

Daraus und aus (1) ergibt sich

(2) Y steht für das Zeichen "+" .

Aus cad Z ffe = gg folgt, daß Z nicht für das Zeichen ":" stehen kann, da der Quotient zweier dreistelliger Zahlen nicht eine zweistellige Zahl sein kann. Daraus und aus (1) und (2) folgt

(3) Z steht für das Zeichen "-" .

Wegen $32^2 > 1000$ ergibt sich aus ae • ae = ffe, daß die durch ae dargestellte Zahl höchstens 31 betragen kann. Da die Endziffern der drei Zahlen übereinstimmen, kann e nur eine der Zahlen 0, 1, 5 oder 6 darstellen,
Aus ab + ae = ff folgt, daß e nicht 0 sein kann, weil sonst b und f die gleichen Zahlen darstellen müßten.
Von den somit für ae in Frage kommenden Zahlen 15, 16, 21, 25, 26 und 31 erfüllen nur die Zahlen 15 und 21 die Bedingungen, daß an der Hunderterstelle und an der Zehnerstelle ihres Quadrats die gleiche Ziffer steht.
Wäre nun a = 1 und e = 5, dann müßte wegen ab + ae = ff mithin f = 3 und b = 8 sein. Wegen $18^2 = 324$ folgte dann aus ab • ab = cad der Widerspruch a = 2.

Für a = 2 und e = 1 folgt f = 4 und b = 3. Also kann nur die Ersetzung

$$\begin{array}{ccccc} 23 & \cdot & 23 & = & 529 \\ + & & + & & - \\ 21 & \cdot & 21 & = & 441 \\ \hline 44 & + & 44 & = & 88 \end{array}$$

allen Bedingungen der Aufgabenstellung genügen.

2) Diese Ersetzung hat in der Tat alle verlangten Eigenschaften; denn die für a, b, c, d, e, f, g eingesetzten Zahlen 2, 3, 5, 9, 1, 4, 8 sind verschieden, ebenso die für X, Y, Z eingesetzten Operationszeichen •, +, -, und die entstehenden Aussagen sind sämtlich wahr.