XVI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklasse 8

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>160821</u>

Für Schülerexperimente wurden genau 29 Einzelteile (Versuchsmaterialien) für genau 29 M eingekauft. Das waren Teile zu 10 M, 3 M oder 0,50 M; von jeder Sorte mindestens ein Teil. Andere Sorten kamen unter den eingekauften Teilen nicht vor.

Wieviel Teile von jeder der drei Sorten waren es insgesamt?

<u>160822</u>

Ein Rechteck habe die Seitenlängen a_1 und b_1.
Um wieviel Prozent verändert sich der Flächeninhalt dieses Rechtecks, wenn die Seite a_1 um 25 % verkleinert und die Seite b_1 um 20 % vergrößert wird?

<u>160823</u>

In einem Kreis k seien zwei verschiedene Durchmesser, die nicht aufeinander senkrecht stehen, eingezeichnet. Ferner sei durch jeden der vier Endpunkte beider Durchmesser die Tangente gelegt.

Beweise, daß die Schnittpunkte E, F, G, H dieser Tangenten die Ecken eines nichtquadratischen Rhombus sind!

A 8

160824

Konstruiere ein Viereck ABCD, das folgende Bedingungen erfüllt:
Die Größe β des Innenwinkels $\sphericalangle CBA$ im Viereck ABCD beträgt 60°.
Die Länge f der Diagonalen BD beträgt 12,5 cm.
Die Länge b der Seite BC beträgt 6,0 cm.
Der Abstand h des Schnittpunktes S der Diagonalen des Vierecks ABCD von der Seite AB beträgt 3,5 cm.
Die Diagonalen des Vierecks ABCD stehen senkrecht aufeinander.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob durch die angegebenen Bedingungen ein Viereck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 8

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

160821) Lösung: 8 Punkte

Da 3 oder mehr Teile zu 10 M mehr als 29 M kosten, waren es höchstens 2 Teile zu 10 M. Angenommen, es wären genau 2 Teile zu 10 M gewesen. Dann wären genau 9 M für die beiden übrigen Sorten verblieben. Von diesen hätten 1 oder 2 Teile zu 3 M gekauft werden können, wonach 6 bzw. 3 M für die Teile zu 0,50 M geblieben wäre. Das wären 12 bzw. 6 Teile zu 0,50 M und damit insgesamt 15 oder 10 Einzelteile gewesen, also zu wenig.
Folglich wurde genau 1 Teil zu 10 M gekauft, und es blieben genau 19 M für die 3-Mark-Teile und 0,50-Mark-Teile.
Angenommen, es wäre nur 1 Teil zu 3 M gekauft worden, dann wären noch 16 M geblieben, wofür 32 Teile zu 0,50 M zu kaufen waren, insgesamt also 34 Teile, im Widerspruch zur Aufgabe.
Erhöht man nun die Anzahl der Teile zu 3 M immer um 1, so verringert sich, wenn der Gesamtpreis gleich bleiben soll, die Anzahl der Teile zu 0,50 M dabei jeweils um 6, wobei die Gesamtzahl der Teile um genau 5 abnimmt. Die einzige Möglichkeit, auf diese Weise 29 Teile zu erreichen, besteht folglich darin, daß man die Anzahl der Teile zu 3 M um genau 1 erhöht und damit die Anzahl der Teile zu 0,50 M um genau 6 verringert. Also wurden insgesamt genau 1 Teil zu 10 M, genau 2 Teile zu 3 M und genau 26 Teile zu 0,50 M gekauft.

160822) Lösung: 10 Punkte

Der Flächeninhalt A_1 des gegebenen Rechtecks beträgt

$A_1 = a_1 \cdot b_1$. Er entspricht 100 %.

Die um 25 % verkleinerte Seite habe die Länge a_2, dann gilt

$$a_2 = a_1 - \frac{1}{4} a_1 = \frac{3}{4} a_1 .$$

Die um 20 % verlängerte Seite habe die Länge b_2, dann gilt

$$b_2 = b_1 + \frac{1}{5} b_1 = \frac{6}{5} b_1.$$

Demnach beträgt der Flächeninhalt des so veränderten zweiten Rechtecks

$$A_2 = a_2 \cdot b_2 = \frac{3}{4}a_1 \cdot \frac{6}{5}b_1 = \frac{9}{10}a_1 \cdot b_1 = \frac{9}{10} A_1 = A_1 - \frac{1}{10} A_1.$$

Daher wurde der Flächeninhalt des ersten Rechtecks um 10 % verkleinert.

<u>160823) Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

Werden die in der Aufgabe genannten Durchmesser mit AC und BC sowie die erwähnten Schnittpunkte mit E, F, G, H wie in Abb. L 823 bezeichnet, dann gilt:

$\overline{AM} = \overline{MC} = \overline{BM} = \overline{MD}$. Folglich gilt

$\triangle MBF \cong \triangle MCF$ und $\triangle MAH \cong \triangle MDH$ (s, s, rechter Winkel)

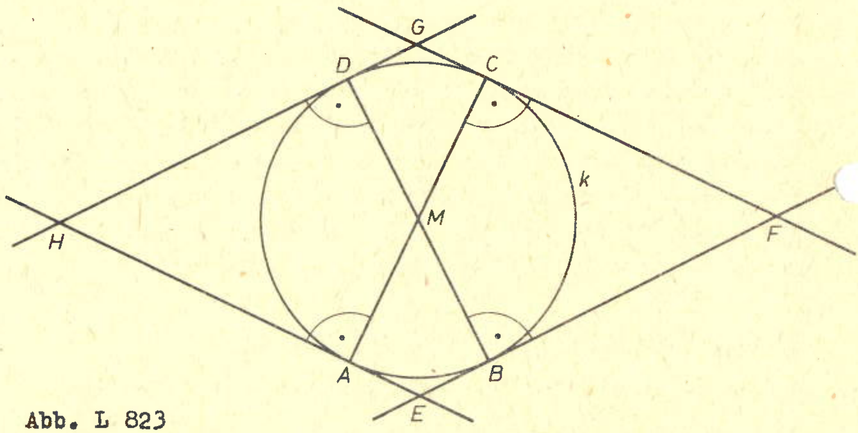

Abb. L 823

Hieraus folgt

$\overline{BF} = \overline{CF}$, $\overline{\sphericalangle BMF}$*) $= \overline{\sphericalangle CMF} = \frac{1}{2}\,\overline{\sphericalangle BMC}$,

weil B und C auf verschiedenen Seiten der Geraden durch M und F liegen, und entsprechend

$\overline{DH} = \overline{AH}$, $\overline{\sphericalangle DMH} = \overline{\sphericalangle AMH} = \frac{1}{2}\,\overline{\sphericalangle DMA}$.

Da nun als Gleichheit von Scheitelwinkeln $\overline{\sphericalangle BMC} = \overline{\sphericalangle DMA}$ gilt,

folgt $\overline{\sphericalangle BMF} = \overline{\sphericalangle DMH}$ und damit $\triangle MBF = \triangle MDH$ (s, w, w),

also $\overline{BF} = \overline{CF} = \overline{DH} = \overline{AH}$. (1)

Entsprechend erhält man

$$\overline{BE} = \overline{AE} = \overline{DG} = \overline{CG}. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$\overline{EH} = \overline{EF} = \overline{GF} = \overline{GH}$, d. h., EFGH ist ein Rhombus.

Im Viereck AMDH sind die Winkel bei A und D rechte. Daher ergänzen sich $\sphericalangle$ AMD und $\sphericalangle$ AHD zu 180°. Laut Voraussetzung ist $\sphericalangle$ AMD kein rechter Winkel. Folglich ist auch $\sphericalangle$ AHD kein rechter Winkel und EFGH mithin kein Quadrat.

<u>160824) Lösung:</u> <u>12 Punkte</u>

I. Angenommen, ABCD sei ein Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht (Abb. L 824). Dann liegt der Schnittpunkt S seiner Diagonalen wegen der Umkehrung des Lehrsatzes des Thales erstens auf dem Kreis mit dem Durchmesser BC und zweitens auf einer Parallelen, die im Abstand h zur Geraden durch A und B verläuft.

Punkt A liegt erstens auf einem Strahl s, der in B an BC unter einem Winkel der Größe β angetragen wurde, und zweitens auf der Geraden durch C und S. Punkt D liegt erstens auf der Geraden durch B und S und zweitens auf dem Kreis um B mit f als Radius.

---

*) $\overline{\sphericalangle ABC}$ bedeutet die Größe des Winkels $\sphericalangle$ ABC.

<u>Hinweis zur Korrektur:</u>

Die Tatsache, daß M auf der Geraden durch H und F liegt, darf nicht ohne Beweis verwendet werden.

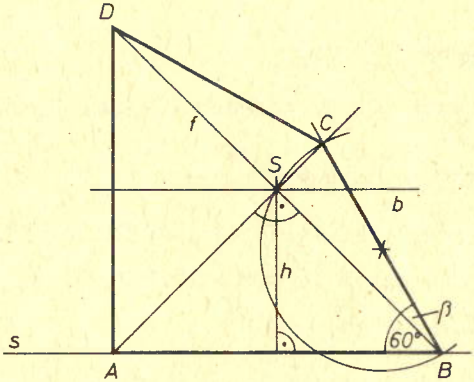

Abb. L 824

Daraus folgt, daß ein Viereck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Wir zeichnen die Seite BC der Länge b.

(2) Wir tragen in B an BC einen Winkel der Größe β an. Sein freier Schenkel sei s.

(3) Wir zeichnen den Kreis k, der BC als Durchmesser hat.

(4) Wir zeichnen die Parallelen zu s im Abstand h.

(5) Für jeden Schnittpunkt von k mit einer dieser Parallelen zeichnen wir, wenn der betreffende Schnittpunkt $S \neq C$ ist, die Gerade durch C und S. Schneidet sie den Strahl s, so sei dieser Schnittpunkt A genannt.

(6) Wir zeichnen die Gerade g durch B und S.

(7) Wir zeichnen um B den Kreis mit dem Radius f. Ein Schnittpunkt von g mit diesem Kreis sei mit D bezeichnet, wenn dabei ABCD ein Viereck wird, das den in (2) konstruierten Winkel als Innenwinkel hat.

III. Jedes so konstruierte Viereck ABCD entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

<u>Beweis:</u> Laut Konstruktion hat die Seite BC die Länge $b = 6$ cm. Ebenso hat laut Konstruktion der Innenwinkel $\sphericalangle ABC$ die Größe $\beta = 60^\circ$, ferner die Diagonale BD die Länge $f = 12{,}5$ cm. Weiter hat der Punkt S von AB einen Abstand von $h = 3{,}5$ cm. Da schließlich Punkt S auf dem Kreis mit dem Durchmesser BC liegt, schneiden sich die Diagonalen BD und AC unter einem Winkel von 90°, wie es verlangt war.

L 8

IV. Die Konstruktionsschritte (1), (2), (3), (4) sind ausführbar und - bis auf Kongruenz - eindeutig ausführbar.

Bei den gegebenen Werten für β , b, h schneidet[1] genau eine der beiden in (4) konstruierten Parallelen den Kreis k, und zwar in 2 Punkten. Für genau einen von diesen führt (5) zu einem Punkt A. Sodann ist Konstruktionsschritt (6) eindeutig ausführbar, und in (7) ergeben sich genau 2 Schnittpunkte von g mit dem Kreis um B mit f. Von den beiden entstehenden Vierecken hat genau eines den in (2) konstruierten Winkel als Innenwinkel (das andere hat bei B einen Innenwinkel der Größe 300°).

Das Viereck ABCD ist mithin durch die angegebenen Bedingungen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

1) Anmerkung: Ein Beweis für die folgenden Existenz- und Einzigkeitsaussagen wird vom Schüler nicht verlangt.

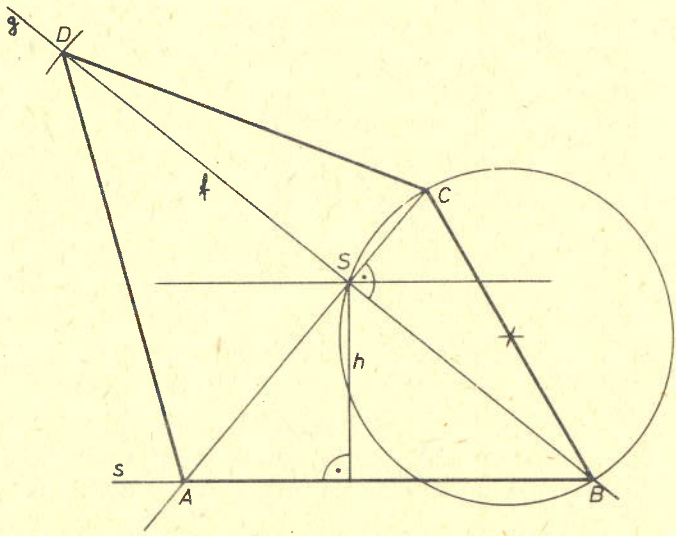

Abb. L 824 a