XVI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 7

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

160721

Nach der Jugendweihefeier ließen sich alle Schüler einer Klasse einzeln fotografieren. Jeder ließ von seinem Foto genügend viele Abzüge herstellen, und dann tauschte jeder Schüler dieser Klasse mit jedem seiner Klassenkameraden sein Foto aus.
Wieviel Schüler tauschten insgesamt in dieser Klasse miteinander die Fotos aus, wenn dabei genau 812 Fotografien ihren Besitzer wechselten?

160722

Eine Gärtnerische Produktionsgenossenschaft verkaufte in den Monaten August bis November Äpfel. Der Preis für 1 kg Äpfel war im September um 20 % niedriger als im August, im November hingegen um 20 % höher als im September.
Waren die Äpfel im November billiger, im Preis gleich oder teurer als im August?
Falls der Preis im November von dem im August abwich, ist anzugeben, um wieviel Prozent des Augustpreises der Novemberpreis von diesem abwich.

160723

Konstruiere aus $a = 5,0$ cm und $b = 7,0$ cm ein Dreieck ABC, bei dem die Mittelsenkrechten der Seiten BC und AC aufeinander senkrecht stehen! Dabei seien a bzw. b die Längen der Seiten BC bzw. AC.

A 7

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob durch die Aufgabenstellung ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

160724

Es seien g_1, g_2, g_3, g_4 und g_5 fünf Geraden, die einander wie in Abb. A 724 angegeben paarweise in den voneinander verschiedenen Punkten A, B, C, D, E, F, G, H, J und K schneiden. Gegeben seien die Größen der Winkel $\sphericalangle$BAJ, $\sphericalangle$HGF, $\sphericalangle$FKJ und $\sphericalangle$DEC, in dieser Reihenfolge α, β, γ und δ genannt.

Ermittle die Größe ε des Winkels $\sphericalangle$DCE!

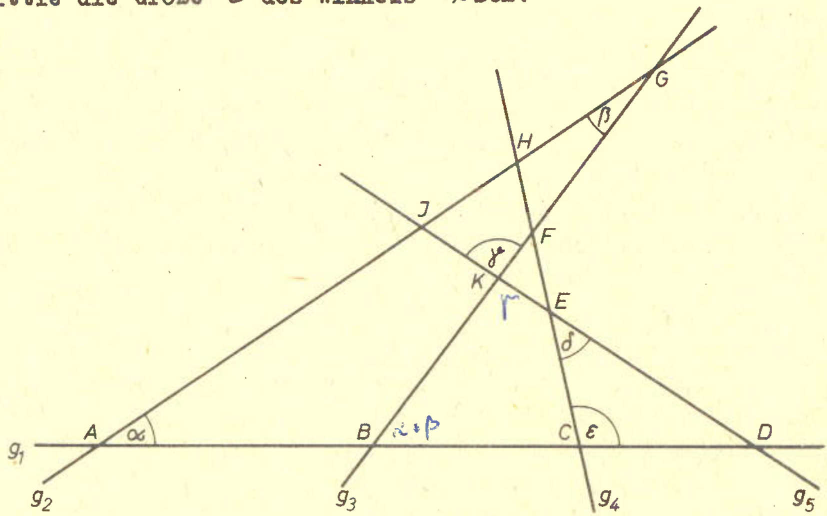

Abb. A 724

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

160721) Lösung: 8 Punkte

Bezeichnet man die gesuchte Anzahl der Schüler dieser Klasse mit x, dann erhielt jeder Schüler (x-1) Fotografien. Eine natürliche Zahl $x > 1$ entspricht mithin genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn für sie $x(x-1) = 812$ gilt.
Nun sind x und x-1 benachbarte natürliche Zahlen. Da
$812 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 29$ ist, läßt sich 812 nur auf die folgenden Weisen in ein Produkt aus zwei natürlichen Zahlen zerlegen:
$812 = 1 \cdot 812 = 2 \cdot 406 = 4 \cdot 203 = 7 \cdot 116 = 14 \cdot 58 = 28 \cdot 29$.
Dabei sind nur im Falle $28 \cdot 29$ die beiden Faktoren benachbarte natürliche Zahlen. Daher ist $x = 29$.
Es tauschten also 29 Schüler in der genannten Klasse ihre Fotos aus.

160722) Lösung: 10 Punkte

Der Preis für 1 kg Äpfel betrage im August x Mark, dann beträgt er im September $(x - \frac{1}{5}x)$ Mark $= \frac{4}{5}x$ Mark.

Im November betrug der Preis $\frac{4}{5}x$ Mark $+ \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}x$ Mark $= \frac{24}{25}x$ Mark.

Da $\frac{24}{25}x < x$ ist, waren die Äpfel im November billiger als im August.

Aus $x - \frac{24}{25}x = \frac{1}{25}x = \frac{4}{100}x$ folgt, daß der Preis für die Äpfel im November um 4 % ihres Preises im August von diesem abwich.

L 7

160723) Lösung: 12 Punkte

I. Angenommen, es gäbe ein Dreieck ABC, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Der Mittelpunkt der Seite BC sei D, der von AC sei E. Der Schnittpunkt der senkrecht aufeinander stehenden Mittelsenkrechten miteinander sei mit F bezeichnet.

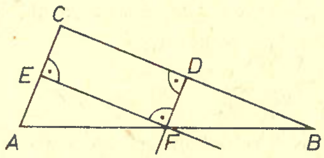

Abb. L 723

Wegen des Winkelsummensatzes, angewandt auf das Viereck DCEF, folgt mithin, daß $\sphericalangle$ ECD (= $\sphericalangle$ACB) ein rechter Winkel ist.

Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man konstruiert einen rechten Winkel, dessen Scheitel C genannt sei.

(2) Auf dem einen seiner Schenkel trägt man von C aus eine Strecke der Länge 5,0 cm ab, deren zweiter Endpunkt B genannt sei, auf dem anderen Schenkel trägt man von C aus eine Strecke der Länge 7,0 cm, ab, deren zweiter Endpunkt A genannt sei.

III. Jedes so konstruierte Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion haben BC bzw. AC die Länge 5,0 cm bzw. 7,0 cm. Die Mittelsenkrechte von BC ist, da auch AC senkrecht auf BC steht, parallel zu AC. Also ist sie senkrecht zur Mittelsenkrechten von AC.

IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind stets bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Also gibt es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck ABC der geforderten Art.

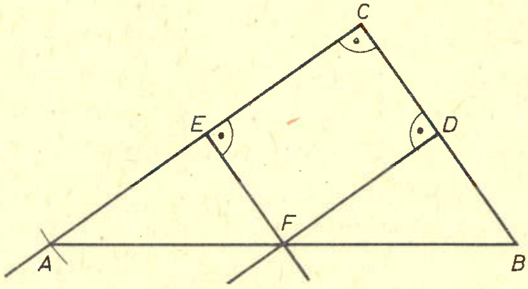

Abb. L 723 a

160724) Lösung: 10 Punkte

Der Winkel $\sphericalangle$ DBG hat als Außenwinkel des Dreiecks ABG die Größe $\alpha + \beta$. Als Scheitelwinkel von $\sphericalangle$ FKJ hat $\sphericalangle$BKD die Größe γ. Mit Hilfe des Satzes über die Summe der Innenwinkel im Dreieck ergibt sich die Größe des Winkels $\sphericalangle$ CDE im Dreieck BDK zu $180^\circ - \alpha - \beta - \gamma$. Mit Hilfe des gleichen Satzes, angewandt auf das Dreieck CDE erhält man für die Größe ε des Winkels $\sphericalangle$ DCE:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta - \gamma + \delta) \\ &= 180^\circ - 180^\circ + \alpha + \beta + \gamma - \delta = \alpha + \beta + \gamma - \delta.\end{aligned}$$