A 11/12;I

XV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>151241</u>
Man untersuche, ob es ein Polynom $P(x)$ dritten Grades gibt, so daß $P(0) = 74$, $P(1) = 19$, $P(2) = 65$ und $P(3) = 92$ gilt. Ist dies der Fall, so ermittle man $P(4)$ und $P(5)$.

<u>151242</u>
Man ermittle die Menge aller derjenigen positiven reellen Zahlen r, für die folgende Aussage wahr ist:
Für jede positive reelle Zahl a hat die für alle reellen x durch $f(x) = 4 - x^2 - ax^3$ definierte Funktion f zwischen den Zahlen $2 - ar$ und 2 eine Nullstelle.

<u>151243</u>
P bezeichne einen Punkt im Innern eines gleichseitigen Dreiecks ABC, der von den Eckpunkten dieses Dreiecks die Abstände

$$\overline{PA} = u, \quad \overline{PB} = v, \quad \overline{PC} = w$$

hat.
Man berechne die Seitenlänge s des gleichseitigen Dreiecks ABC aus u, v, w.

A 11/12;II XV. Olympiade Junger Mathematiker der
Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

151244

Es sei f diejenige Funktion, die als Definitionsbereich die Menge aller Tripel (x,y,z) von nichtnegativen reellen Zahlen x, y, z mit $x + y + z = \pi$ hat und die jedem solchen Tripel jeweils die Zahl $f(x,y,z) = \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z$ zuordnet.

151245

Bekanntlich gilt: Für jede natürliche Zahl n gilt: Eine Ebene wird durch n Geraden, von denen keine drei durch ein und denselben Punkt laufen und keine zwei parallel sind, in genau $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ Teile zerlegt.

Aufgabe: Man ermittle für jede natürliche Zahl n die Anzahl der Teile, in die der Raum durch n Ebenen zerlegt wird, von denen keine vier durch ein und denselben Punkt gehen, keine drei zueinander parallele oder zusammenfallende Schnittgeraden besitzen und keine zwei zueinander parallel sind.

Von den nachstehenden Aufgaben 1246A und 1246B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

151246A

Mit R_n wird die Menge aller n-Tupel reeller Zahlen bezeichnet. In R_n ist durch

$$(x_1,x_2,\dots,x_n) + (y_1,y_2,\dots,y_n) = (x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$$

eine Addition und durch

$$\lambda(x_1,x_2,\dots,x_n) = (\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n)\,, \qquad \lambda \text{ reell},$$

die Multiplikation mit einer beliebigen reellen Zahl λ definiert.

Es sei M eine Teilmenge von R_n, für die gilt:

Mit $(x_1,x_2,\dots,x_n),(y_1,y_2,\dots,y_n) \in M$ gilt für jedes λ mit $0 \leqq \lambda \leqq 1$

$$\lambda(x_1,x_2,\dots,x_n) + (1-\lambda)(y_1,y_2,\dots,y_n) \in M. \qquad (1)$$

Ein n-Tupel $(s_1,s_2,\dots,s_n) \in M$ heißt $*$-Element von M, wenn aus $(s_1,s_2,\dots,s_n) = \frac{1}{2}(x_1,x_2,\dots,x_n) + \frac{1}{2}(y_1,y_2,\dots,y_n)$ mit $(x_1,x_2,\dots,x_n),(y_1,y_2,\dots,y_n) \in M$ stets $s_1 = x_1 = y_1$, $s_2 = x_2 = y_2$, $\dots, s_n = x_n = y_n$ und damit $(s_1,s_2,\dots,s_n) = (x_1,x_2,\dots,x_n) = (y_1,y_2,\dots,y_n)$ folgt.

Man zeige: $(s_1,s_2,\dots,s_n)$ ist $*$-Element genau dann, wenn für beliebiges λ mit $0<\lambda<1$ aus

$$(s_1,s_2,\dots,s_n) = \lambda(x_1,x_2,\dots,x_n) + (1-\lambda)(y_1,y_2,\dots,y_n)$$

mit $(x_1,x_2,\dots,x_n),(y_1,y_2,\dots,y_n) \in M$ stets $s_1 = x_1 = y_1$, $s_2 = x_2 = y_2, \dots, s_n = x_n = y_n$, also $(s_1,s_2,\dots,s_n) = (x_1,x_2,\dots,x_n) = (y_1,y_2,\dots,y_n)$ folgt.

<u>151246B</u>

In der mathematischen Statistik werden häufig Summen der folgenden Form benötigt:

$$M = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} \quad ;$$

$$N = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \quad ;$$

$$m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{2k} \quad ,$$

wobei n eine natürliche Zahl mit $n \geqq 1$ ist.

a) Man berechne die Summen M, N und m.

b) Es sei f die für alle reellen x durch

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n} (k-x)^2 \binom{2n}{2k}$$

definierte Funktion.

Man berechne f(x) und weise nach, daß f einen kleinsten Funktionswert besitzt und diesen genau für x = m annimmt.

L 11/12;I XV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

151241) Lösung: 5 Punkte

Ein Polynom $P(x) = c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3$ hat genau dann die angegebenen Eigenschaften, wenn die Gleichungen

$$\begin{aligned} c_0 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 74 \\ c_0 + c_1 + c_2 + c_3 &= 19 \\ c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 8c_3 &= 65 \\ c_0 + 3c_1 + 9c_2 + 27c_3 &= 92 \end{aligned}$$

gelten.
Diese sind genau für $c_0 = 74$, $c_1 = -\frac{291}{2}$, $c_2 = \frac{221}{2}$, $c_3 = -20$ erfüllt.
Für $x = 4$ bzw. $x = 5$ ergibt sich daher

$$P(4) = -20; \quad P(5) = -391.$$

151242) Lösung: 6 Punkte

Es gilt $f'(x) = -2x - 3ax^2 < 0$ für alle $x > 0$. Daraus folgt, daß die Funktion f im Intervall aller $x > 0$ streng monoton fallend ist. Ferner gilt $f(0) = 4$ und $f(2) = -8a$. Wegen der Stetigkeit von f besitzt f folglich im Intervall aller positiven x genau eine Nullstelle. Diese liegt im Intervall $0 < x < 2$.
Nun wird bewiesen, daß eine positive Zahl r genau dann die in der Aufgabe geforderte Eigenschaft hat, wenn

$$f(2-ar) > 0 \text{ für alle positiven } a \text{ mit } 2-ar > 0 \qquad (1)$$

gilt:
Hat r die geforderte Eigenschaft, so hat f insbesondere für jedes positive a mit $2-ar > 0$ eine Nullstelle zwischen $2-ar$ und 2. Wäre für eines dieser a aber $f(2-ar) \leqq 0$, so hätte f wegen der Monotonie zwischen $2-ar$ und 2 nur negative Funktionswerte.
Gilt umgekehrt (1), so hat f für alle in (1) genannten a eine Nullstelle zwischen $2-ar$ und 2.

Für alle a mit $2-ar \leqq 0$ aber hat f ebenfalls eine Nullstelle zwischen $2-ar$ und 2, nämlich die oben genannte Nullstelle zwischen 0 und 2.

Die Bedingung (1) ist nun genau dann erfüllt, wenn

$$4 - 4 + 4ar - a^2r^2 - 8a + 12a^2r - 6a^3r^2 + a^4r^3 > 0,$$

also genau dann, wenn

$$a^3r^3 + ar(12 - r) > 6a^2r^2 + 4(2 - r) \tag{2}$$

gilt.

Im Falle $r < 2$ gilt $4(2 - r) > 0$. Wählt man dann ein positives a so klein, daß

$$a < \frac{2}{r} \quad \text{und} \quad a < \frac{1}{3}\sqrt[3]{2(2 - r)} \quad \text{und} \quad a < \frac{2(2 - r)}{r(12 - r)}$$

gilt, so ist $2-ar > 0$ und $a^3r^3 < 2(2 - r)$ und $ar(12-r) < 2(2-r)$, also $a^3r^3 + ar(12-r) < 4(2-r)$, also (2) nicht erfüllt.

Mithin trifft (1) im Falle $r < 2$ nicht zu.

Es sei nun $r = 2$.

In diesem Falle gilt (2) genau dann, wenn $8a^3 + 20a > 24a^2$, also genau dann, wenn $a^2 - 3a + \frac{5}{2} > 0$, d.h.

$$\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0 \tag{3}$$

gilt.

Da (3) für alle reellen a erfüllt ist, hat mithin $r = 2$ die geforderte Eigenschaft.

Ist nun $r > 2$, so folgt wegen des monotonen Fallens von f und wegen der soeben gezeigten Aussage (1) für $r = 2$, d.h. $f(2 - 2a) > 0$, aus $0 < 2 - ar < 2 - 2a$ erst recht $f(2 - ar) > 0$.

Also hat auch jedes $r > 2$ die geforderte Eigenschaft.

Daher haben genau alle $r \geqq 2$ die geforderte Eigenschaft.

<u>151243) Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

Es sei g die Gerade durch A und C. Ferner sei P' derjenige auf der anderen Seite von g wie P gelegene Punkt für den

$$\overline{\sphericalangle P'AC} = \overline{\sphericalangle PAB} \quad \text{und}$$

$$\overline{AP'} = u \quad \text{gilt.}$$

Da P innerer Punkt von $\triangle ABC$ ist, gilt

$$\overline{\sphericalangle PAB} = 60^\circ - \overline{\sphericalangle PAC} \tag{1}$$

und folglich

$$\overline{\sphericalangle P'AC} + \overline{\sphericalangle PAC} = 60^\circ, \tag{2}$$

so daß $\triangle P'AP$ gleichseitig mit der Seitenlänge u ist.
Wegen (1) und (2) schneidet PP' die Gerade g in einem Punkte des Strahls aus A durch C und wegen $u < s = \overline{AC}$ sogar in einem inneren Punkt der Strecke AC.
Daher ist

$$\overline{\sphericalangle APC} = \overline{\sphericalangle APP'} + \overline{\sphericalangle P'PC} = 60^\circ + \varphi$$

, wenn man $\overline{\sphericalangle P'PC} = \varphi$ setzt. Nach dem Kriterium (sws) gilt $\triangle ACP' \cong \triangle ABP$, so daß $\overline{P'C} = v$ gilt. Daher ergibt sich aus dem Kosinussatz, angewandt auf $\triangle PCP'$,

$$\cos\varphi = \frac{u^2 + w^2 - v^2}{2uw} \tag{3}$$

und wegen $0^\circ < \varphi < 180^\circ$ weiter $\sin\varphi > 0$, also

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \frac{(u^2 + w^2 - v^2)^2}{4u^2w^2}}$$

$$= \frac{1}{2uw}\sqrt{-u^4-v^4-w^4+2u^2v^2+2u^2w^2+2v^2w^2}\,. \tag{4}$$

Weiter folgt aus dem Kosinussatz, angewandt auf $\triangle APC$, wegen (3), (4) und

$$\cos(\varphi + 60^\circ) = \cos\varphi \cdot \cos 60^\circ - \sin\varphi \cdot \sin 60^\circ$$

$$= \tfrac{1}{2}(\cos\varphi - \sqrt{3}\sin\varphi)$$

$$\cos(\overline{\sphericalangle APC}) = \frac{1}{4uw}\left(u^2+w^2-v^2- \sqrt{3(-u^4-v^4-w^4+2u^2v^2+2u^2w^2+2v^2w^2)}\right).$$

Daraus folgt

$$s^2 = u^2 + w^2 - 2uw\cos(\overline{\sphericalangle APC}),$$

$$s = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(u^2+v^2+w^2 + \sqrt{3(u^4-v^4-w^4+2u^2v^2+2u^2w^2+2v^2w^2)}\right)}\,.$$

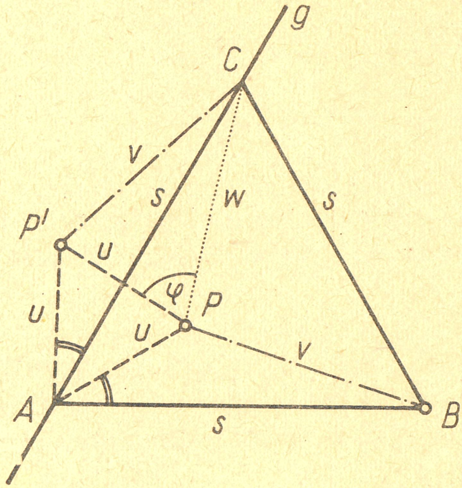

Abb. L 1243

L 11/12;II

XV. Olympiade Junger Mathematiker der
Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

151244) Lösung: **6 Punkte**

1. Wegen $\sin^2 x \geqq 0$, $\sin^2 y \geqq 0$, $\sin^2 z \geqq 0$ gilt $f(x,y,z) \geqq 0$ für alle (x,y,z) des Definitionsbereichs.
2. Ferner gilt wegen $z = \pi - (x+y)$ $\sin^2 z = \sin^2(x+y)$, also

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x+y) \\ &= 2 - \cos^2 x - \cos^2 y + \sin^2 x \cos^2 y + \cos^2 x \sin^2 y \\ &\qquad + 2\sin x \cos y \cos x \sin y \\ &= 2 - 2\cos^2 x \cos^2 y + 2 \sin x \sin y \cos x \cos y \\ &= 2 - 2\cos x \cos y \, (\cos x \cos y - \sin x \cdot \sin y) \\ &= 2 - (\cos(x+y) + \cos(x-y))\cos(x+y) \\ &= 2 - (\cos(x+y) + \tfrac{1}{2}\cos(x-y))^2 + \tfrac{1}{4}\cos^2(x+y) \\ &\leqq 2 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{9}{4}, \text{ da } \cos^2(x-y) \leqq 1. \end{aligned}$$

Der Wertebereich von f ist also Teilmenge des abgeschlossenen Intervalls $\left[0, \frac{9}{4}\right]$.

3. Es soll nun nachgewiesen werden, daß der Wertebereich von f sogar gleich diesem Intervall ist.
Setzt man nämlich z.B.

$$x = \frac{\pi}{3} + 2t,\; y = \frac{\pi}{3} - t,\; z = \frac{\pi}{3} - t \text{ mit } 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{3},$$

so gilt

$$x \geqq 0,\; y \geqq 0,\; z \geqq 0 \text{ und } x + y + z = \pi.$$

Ferner gilt für die Funktion F, die im Intervall $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{3}$ durch

$$F(t) = \sin^2\left(\frac{\pi}{3} + 2t\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - t\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - t\right)$$

definiert ist.

$$F(0) = \frac{9}{4},\; F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

Da in dem abgeschlossenen Intervall $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ die Funktionen

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2t\right),\; y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - t\right)$$

stetig sind, sind auch ihre Quadrate stetig und daher die aus der Summe dieser Quadrate gebildete Funktion F. Die Funktion F nimmt daher jeden Wert zwischen 0 und $\frac{9}{4}$ und, wie oben gezeigt wurde, auch diese Werte selbst an. Folglich gilt das auch für die Funktion f; der Wertebereich dieser Funktion ist also das abgeschlossene Intervall $\left[0, \frac{9}{4}\right]$.

151245) Lösung: 7 Punkte

Die jeweils zu n gesuchte Anzahl der Teile sei mit A_n bezeichnet ($n = 0,1,2,\ldots$). Dann ist $A_o = 1$. Für $n > 0$ gilt ferner: Es seien $E_1,\ldots,E_n$ Ebenen, die den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen.

Nach Voraussetzung schneidet E_n die Ebenen $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}$ in n-1 Geraden, von denen keine drei durch ein und denselben Punkt gehen und keine zwei parallel sind.

Nach der Vorbemerkung zerlegen diese Geraden die Ebene E_n in $\frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$ Teile. Jeder dieser Ebenenteile zerlegt genau einen unter den A_{n-1} schon vorher vorhandenen Raumteilen in genau zwei (durch ihn getrennte) Raumteile; alle übrigen der schon vorher vorhandenen Raumteile bleiben unverändert. Also gilt

$$A_n = A_{n-1} + \frac{1}{2}(n^2 - n + 2). \quad (n = 1,2,\ldots)$$

Hieraus folgt durch vollständige Induktion

$$A_n = A_o + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2-k+2) = 1 + \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k + 2n\right],$$

$$(n = 0,1,2,\ldots).$$

Nun gilt bekanntlich $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ und $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

$$\text{also ist } A_n = 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + 2n\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)+12n}{6}\right]$$

$$= \frac{6 + 6n + n(n+1)(n-1)}{6}$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(n^2 - n+6) = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6).$$

Damit ist die gesuchte Anzahl $A_n = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$ ermittelt.

L 11/12;II

151246A) Lösung: 8 Punkte

1. Wenn für beliebiges λ mit $0<\lambda<1$ aus der Darstellung

$$(s_1,s_2,\ldots,s_n) = \lambda(x_1,x_2,\ldots,x_n) + (1-\lambda)(y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

stets $(s_1,s_2,\ldots,s_n) = (x_1,x_2,\ldots,x_n) = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ folgt, so gilt das insbesondere für $\lambda = \frac{1}{2}$. Also ist $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ ein ✱-Element.

2. Es sei $(s_1,s_2,\ldots,s_n) \in M$ ein ✱-Element und es seien $(x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n) \in M$ und eine reelle Zahl λ mit $0<\lambda<1$ derart gegeben, daß $(s_1,s_2,\ldots,s_n) =$
$= \lambda(x_1,x_2,\ldots,x_n) + (1-\lambda)(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ ist.
Dann existiert eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ derart, daß für

$\mu_1 = \lambda+\varepsilon$ und $\mu_2 = \lambda-\varepsilon$ gilt: $0 < \mu_1, \mu_2 < 1$.

(Jedes $0 < \varepsilon < \min(\lambda, 1-\lambda)$ leistet das Verlangte). Es wird

$$\mu_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) + (1-\mu_1)(y_1,y_2,\ldots,y_n) = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$$

und

$$\mu_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) + (1-\mu_2)(y_1,y_2,\ldots,y_n) = (b_1,b_2,\ldots,b_n)$$

gesetzt. (Wegen (1) ist dann $(a_1,a_2,\ldots,a_n),(b_1,b_2,\ldots,b_n) \in M$ und es gilt

$$\tfrac{1}{2}(a_1,a_2,\ldots,a_n) + \tfrac{1}{2}(b_1,b_2,\ldots,b_n) = \left(\frac{(\mu_1+\mu_2)}{2}x_1, \frac{(\mu_1+\mu_2)}{2}x_2, \ldots, \frac{(\mu_1+\mu_2)}{2}x_n\right) + \left(\frac{(2-\mu_1-\mu_2)}{2}y_1, \frac{(2-\mu_1-\mu_2)}{2}y_2, \ldots, \frac{(2-\mu_1-\mu_2)}{2}\right)y_2$$

Wegen $\frac{\mu_1+\mu_2}{2} = \lambda$ und $\frac{2-\mu_1-\mu_2}{2} = 1-\lambda$ folgt

$\frac{1}{2}(a_1,a_2,\ldots,a_n) + \frac{1}{2}(b_1,b_2,\ldots,b_n) = (s_1,s_2,\ldots,s_n)$. Da $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ ein ✱-Element ist, folgt hieraus $a_i = b_i$ für $i = 1,2,\ldots,n$, also $a_i - b_i = \mu_1x_i + (1-\mu_1)y_i - \mu_2x_i - (1-\mu_2)y_i =$

$$= (\mu_1-\mu_2)(x_i-y_i) = 0 .$$

Wegen $\mu_1 - \mu_2 = 2\varepsilon > 0$ folgt hieraus $x_i = y_i$ für $i = 1,2,\ldots,n$, und damit $s_i = \lambda x_i + (1-\lambda)x_i = x_i = y_i$.

151246B Lösung: 8 Punkte

1. Es gilt

$$M = \binom{2n-1}{0} + \binom{2n-1}{2} + \ldots + \binom{2n-1}{2n-2},$$

Es sei

$$M' = \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-1}{3} + \ldots + \binom{2n-1}{2n-1}.$$

Dann gilt

$$M + M' = \binom{2n-1}{0} + \binom{2n-1}{1} + \ldots + \binom{2n-1}{2n-1}$$

$$= (1+1)^{2n-1} = 2^{2n-1} \qquad (1)$$

$$M - M' = (1-1)^{2n-1} = 0.$$

Daraus folgt

$$2M = 2^{2n-1}, \text{ also } M = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} = 2^{2n-2}, \qquad (2)$$

$$2M' = 2^{2n-1}, \text{ also } M' = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n-1}{2k-1} = 2^{2n-2}. \qquad (3)$$

2. Analog wird N berechnet.

Mit $N' = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1}$ gilt $N + N' = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$,

$N - N' = (1-1)^{2n} = 0.$

Daraus folgt

$$N = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = 2^{2n-1} \qquad (4)$$

$$N' = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} = 2^{2n-1}. \qquad (5)$$

3. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} 2k \, \frac{2n(2n-1)\cdot\ldots\cdot(2n-2k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2k}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} 2n \frac{(2n-1)\cdot\ldots\cdot(2n-2k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(2k-1)} = n \sum_{k=1}^{n} \binom{2n-1}{2k-1}$$

und damit wegen (3)

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{2k} = n\cdot 2^{2n-2} . \tag{6}$$

Daraus folgt

$$m = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{2k} = \frac{n\cdot 2^{2n-2}}{2^{2n-1}} = \frac{n}{2} . \tag{7}$$

b) Man erhält

$$f(x) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{n} (k-x)^2\binom{2n}{2k} = \frac{1}{4N} \cdot \sum_{k=0}^{n} (2k-2x)^2\binom{2n}{2k}$$

$$= \frac{1}{4N} \cdot \sum_{k=0}^{n} (4k^2-8kx+4x^2)\binom{2n}{2k}$$

$$= \frac{1}{4N} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left[2k(2k-1) + 2k(1-4x) + 4x^2\right]\cdot\binom{2n}{2k}$$

$$= \frac{1}{4N} \left[\sum_{k=0}^{n} 2k(2k-1)\binom{2n}{2k} + 2(1-4x)\cdot\sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{2k} + 4x^2\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\right]. \tag{8}$$

Nun gilt

$$\sum_{k=0}^{n} 2k(2k-1)\binom{2n}{2k} = \sum_{k=1}^{n} 2k(2k-1)\,\frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdot\ldots\cdot(2n-2k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2n(2n-1)\binom{2n-2}{2k-2} = 2n(2n-1)2^{2n-3} \tag{9}$$

Aus (9), (6), (4) und (8) folgt weiter

$$f(x) = \frac{1}{4N}\left[2n(2n-1)2^{2n-3} + 2(1-4x)n\cdot 2^{2n-2} + 4x^2\cdot 2^{2n-1}\right]$$

und hieraus wegen $N = 2^{2n-1}$, also $4N = 2^{2n+1}$

$$f(x) = \frac{1}{2^{2n+1}} (n^2 \cdot 2^{2n-2} - n \cdot 2^{2n-2} + 2n \cdot 2^{2n-2} - nx \cdot 2^{2n+1} + x^2 \cdot 2^{2n+1})$$

$$= x^2 - nx + \frac{n}{8} + \frac{n^2}{4} = (x - \frac{n}{2})^2 + \frac{n}{8} \geqq \frac{n}{8} ,$$

worin das Gleichheitszeichen genau für $x = \frac{n}{2} = m$ gilt. Daher besitzt f den Wert $\frac{n}{8}$ als kleinsten Funktionswert und nimmt ihn genau dann an, wenn $x = m$ ist, w.z.b.w..