XV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

151221

a) Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, daß in der nach dem binomischen Lehrsatz gebildeten Entwicklung

$$(a+b)^n = c_0 a^n + c_1 a^{n-1} b + c_2 a^{n-2} b^2 + \dots + c_n b^n \qquad (*)$$

die Koeffizienten c_0, c_1, c_2 die Summe $c_0 + c_1 + c_2 = 79$ haben. Gibt es solche Zahlen n, so ermittle man sie.

b) Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, daß aus (*) durch die Ersetzung $a = x^2$, $b = \frac{1}{x}$ eine Entwicklung

$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n = c_0 x^{k_0} + c_1 x^{k_1} + c_2 x^{k_2} + \dots + c_n x^{k_n}$$

entsteht, in der einer der Exponenten den Wert $k_i = 0$ hat, d. h. in der ein von x freies Glied vorkommt. Gibt es solche Zahlen, so ermittle man sie.

c) Man ermittle alle natürlichen Zahlen n, die sowohl die in a) als auch die in b) angegebene Bedingung erfüllen.

151222

Gegeben sei eine Pyramide, deren Grundfläche ein Rechteck mit dem Flächeninhalt Q ist. Zwei der Seitenflächen stehen senkrecht auf der Grundfläche; die zwei restlichen schließen mit der Grundfläche Winkel der Größe α bzw. β ein.
Man ermittle das Volumen der Pyramide in Abhängigkeit von Q, α und β.

151223

Die Forschungsabteilungen zweier volkseigener Betriebe sollen zu einer gemeinsamen Beratung genau je sechs Mitarbeiter delegieren. An der Beratung sollen insgesamt 6 Mathematiker und 6 Ingenieure teilnehmen. In der Forschungsabteilung des einen Betriebes arbeiten 5 Mathematiker und 7 Ingenieure, in der des anderen 7 Mathematiker und 5 Ingenieure.
Man ermittle die Anzahl aller möglichen personellen Zusammensetzungen der Beratung unter den angegebenen Bedingungen.

151224

Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die das Gleichungssystem

(1) $x + y + z = a$

(2) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

(3) $x^3 + y^3 + z^3 = a^3$

erfüllt ist, wobei a eine reelle Zahl ist.

XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11 und 12

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

151221) **Lösung:** **8 Punkte**

a) Angenommen, es gibt eine natürliche Zahl n, für die

$c_0 + c_1 + c_2 = 79$ gilt. Dann gilt

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 79$, woraus man

$n^2 + n - 156 = 0$, also als einzige Möglichkeit $n = 12$ erhält, da die zweite Lösung $n = -13$ dieser Gleichung keine natürliche Zahl ist.

Tatsächlich gilt

$\binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} = 1 + 12 + \frac{12 \cdot 11}{2} = 79.$

Also hat genau $n = 12$ die verlangte Eigenschaft.

b) Für alle i ($i = 1, 2, \ldots, n$) gilt

$c_i x^{k_i} = \binom{n}{i} (x^2)^{n-i} \cdot \frac{1}{x^i} = \binom{n}{i} x^{2n-3i}$.

Daraus erhält man $k_i = 2n - 3i$. Folglich erhält man $k_i = 0$ genau dann, wenn $2n - 3i = 0$, d. h. $i = \frac{2}{3}n$ gilt. Dies ist genau dann eine natürliche Zahl mit $0 \leqq i \leqq n$, wenn n durch 3 teilbar ist.

c) Da 12 durch 3 teilbar ist, erfüllt genau $n = 12$ beide Bedingungen a), b).

151222) Lösung: 9 Punkte

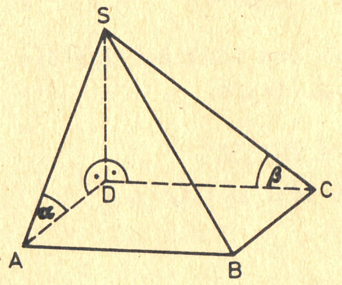

Abb. L 1222

Es sei ABCDS eine Pyramide, deren Grundfläche ABCD ein Rechteck mit dem Flächeninhalt Q ist und deren Spitze S sei. Die senkrecht auf der Grundfläche stehenden Seitenflächen haben eine Pyramidenkante gemeinsam, da sie sonst parallelen Ebenen angehören würden, was bei einer Pyramide nicht möglich ist. Diese zur Grundfläche senkrechte Pyramidenkante sei SD.

Daher sind für die zur Grundfläche nicht senkrechten Seitenflächen BCS und ABS die Neigungswinkel gleich den Winkeln $\sphericalangle$ SAD und $\sphericalangle$ SCD. Außerdem ist die Länge von SD gleich der Länge h der Höhe der Pyramide (Abb. L 1222).

O.B.d.A. gelte nun

$\overline{\sphericalangle SAD} = \alpha$, $\overline{\sphericalangle SCD} = \beta$.

Ferner gilt $(h =)\ \overline{SD} = \overline{AD} \cdot \tan\alpha$ (1)

$\overline{SD} = \overline{CD} \cdot \tan\beta$ (2)

und $\overline{AD} \cdot \overline{CD} = Q$. (3)

Aus (1) und (2) ergibt sich durch Multiplikation, anschließendes Einsetzen von (3) und Radizieren

$$\overline{SD} = \sqrt{Q \cdot \tan\alpha \cdot \tan\beta}\,.$$

Somit ergibt sich für das gesuchte Volumen V der Pyramide

$$V = \frac{1}{3} Q \sqrt{Q \cdot \tan\alpha \cdot \tan\beta}\,.$$

151223) **Lösung:** 11 Punkte

Für jedes $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$ sei M_k die Menge aller derjenigen unter den gesuchten Zusammensetzungen, bei denen der erstgenannte Betrieb genau k Mathematiker delegiert. Wenn eine Zusammensetzung Z zu M_k gehört, so folgt: Da der genannte Betrieb insgesamt genau 6 Personen delegiert, delegiert er k Mathematiker und (6-k) Ingenieure. Da insgesamt 6 Mathematiker und 6 Ingenieure teilnehmen sollen, delegiert der andere Betrieb genau (6-k) Mathematiker und k Ingenieure. Besteht umgekehrt eine Zusammensetzung Z darin, daß der eine Betrieb k Mathematiker und (6-k) Ingenieure sowie der andere (6-k) Mathematiker und k Ingenieure delegiert, so sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, also gehört Z dann zu M_k.

Eine Abzählung aller $Z \in M_k$ ergibt sich folgendermaßen:

Der eine Betrieb hat genau $\binom{5}{k}$ Möglichkeiten, k seiner 5 Mathematiker zu delegieren. Bei jeder dieser Möglichkeiten hat er genau $\binom{7}{6-k}$ Möglichkeiten, (6-k) seiner 7 Ingenieure zu delegieren. In jeder der so entstehenden Möglichkeiten hat der andere Betrieb genau $\binom{7}{6-k}$ Möglichkeiten, (6-k) Mathematiker zu delegieren, und dann jeweils $\binom{5}{k}$ Möglichkeiten, k Ingenieure zu delegieren. Also enthält M_k genau $\binom{5}{k}^2 \cdot \binom{7}{6-k}^2$ Zusammensetzungen.

Jede Zusammensetzung, die überhaupt den Bedingungen der Aufgabe entspricht, gehört für genau ein k der Menge M_k an. Daher ist die gesuchte Anzahl

$$\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k}^2 \cdot \binom{7}{6-k}^2 = 1^2 \cdot 7^2 + 5^2 \cdot 21^2 + 10^2 \cdot 35^2 + 10^2 \cdot 35^2 + 5^2 \cdot 21^2 + 1^2 \cdot 7^2$$

$$= 2(49 + 11025 + 122500) = 267\,148.$$

151224) **Lösung:** **12 Punkte**

Angenommen, (x, y, z) seien ein (geordnetes) Tripel reeller Zahlen, das (1), (2) und (3) genügt.

Dann folgt aus (3)

$$x^3 + y^3 = a^3 - z^3$$

d. h.

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = (a - z)(a^2 + az + z^2).$$

Wegen (1) gilt daher

$$(a - z)(x^2 - xy + y^2) = (a - z)(a^2 + az + z^2). \qquad (4)$$

Ist $z = a$, so folgt aus (2) $x = y = 0$

Ist $z \neq a$, so folgt aus (4) $x^2 - xy + y^2 = a^2 + az + z^2$

und weiter wegen (2)

$$-xy = 2z^2 + az. \qquad (5)$$

Quadriert man (1) und subtrahiert (2) davon, so erhält man

$2(xy + yz + zx) = 0$, also unter Berücksichtigung von (1)

$$- xy = (y + x)z = (a - z)z. \qquad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt $z = 0$ und $xy = 0$, woraus sich wegen (1) ergibt, daß entweder $x = a$, $y = 0$ oder $x = 0$, $y = a$ sein muß.

Somit können nur die Tripel
$(a,0,0)$, $(0,a,0)$, $(0,0,a)$
den Gleichungen (1), (2) und (3) genügen.
Wie eine Probe zeigt, tun sie das auch alle drei.