A 10;I XV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

<u>151041</u>

Gegeben sei ein Würfel ABCDEFGH mit der Kantenlänge a (Abb. A. 1041).
Durch die Punkte A und F, A und H sowie F und H seien drei ebene Schnitte so gelegt, daß sie jeweils zur Raumdiagonalen EC parallel verlaufen. Durch diese Schnitte werden drei Teilkörper vom Würfel abgetrennt. Berechnen Sie das Volumen V_R des verbliebenen Restkörpers!

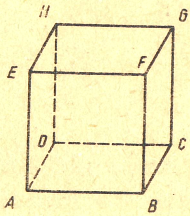


Abb. A 1041

<u>151042</u>

In einem vorgegebenen quadratischen Gitternetz sollen die in Abb. A 1042 dargestellten 36 Schnittpunkte der Gitterlinien durch einen geschlossenen Streckenzug derart verbunden werden, daß

(1) jede Teilstrecke des Streckenzuges entweder waagerecht oder senkrecht verläuft,

(2) beim Durchlaufen des Streckenzuges jeder der 36 Punkte genau einmal erreicht wird und

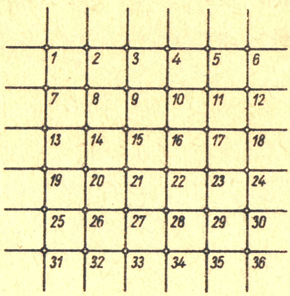


Abb. A 1042

(3) die entstehende Figur mindestens zwei Symmetrieachsen besitzt, die gleichzeitig auch Symmetrieachsen des Quadrates mit den Eckpunkten 1, 6, 36, 31 sind.

Zeichnen Sie möglichst viele derartige Streckenzüge, die untereinander nicht kongruent sind, und beweisen Sie, daß es keine weiteren mit den geforderten Bedingungen gibt!

Von den nachstehenden Aufgaben 1043A und 1043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

151043A

Ist z eine reelle Zahl, so werde mit $[z]$ diejenige ganze Zahl $[z] = g$ bezeichnet, für die $g \leq z < g+1$ gilt.

Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die

$$-10 \leq x \leq 2 \quad \text{und}$$
$$[x^2] = [x]^2 \quad \text{gilt!}$$

151043B

In einer Ebene mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten (x;y) seien die Punkte $F_1(\sqrt{2};\sqrt{2})$ und $F_2(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$ sowie der Graph k derjenigen Funktion f gegeben, die für alle reellen $x \neq 0$ durch $f(x) = \frac{1}{x}$ definiert ist.

Man beweise: Es gibt eine Zahl c, so daß k in der xy-Ebene die Menge aller derjenigen Punkte der xy-Ebene ist, für die der Betrag der Differenz der Abstände zu den Punkten F_1 und F_2 gleich c ist. Man ermittle diese Zahl c.

A 10;II XV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

151044

Man ermittle alle ungeordneten Paare (x,y) aus zwei natürlichen Zahlen x,y mit $x \neq y$, für die folgendes gilt:
Das arithmetische Mittel von x und y ist eine zweistellige Zahl. Vertauscht man deren Ziffern, so erhält man das geometrische Mittel von x und y (das ist die Zahl $\sqrt{x\,y}$).

151045

Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus s,R,r! Dabei sei s der halbe Umfang, R der Radius des Ankreises an die Seite AC und r der Radius des Inkreises des zu konstruierenden Dreiecks ABC.
Ermitteln Sie Beziehungen, die genau dann zwischen den gegebenen Längen s, R, r bestehen, wenn ein derartiges Dreieck existiert! Untersuchen Sie, ob es dann bis auf Kongruenz genau ein solches Dreieck gibt!

Hinweis: Es gibt zu dem Dreieck ABC genau einen Kreis, der die Seite AC, die Verlängerung von BA über A hinaus und die Verlängerung von BC über C hinaus berührt. Dieser Kreis heißt der Ankreis an die Seite AC des Dreiecks ABC.

151046

Es sei f eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion. Vorausgesetzt werde, daß f nullstellenfrei ist, d.h., daß keine reelle Zahl x mit $f(x) = 0$ existiert.
Untersuchen Sie, ob aus dieser Voraussetzung folgt, daß auch die durch $F(x) = f(2x) + f(3x)$ für alle reellen Zahlen x definierte Funktion F nullstellenfrei ist!

30 05 99-1(588)

L 10;I XV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

151041) Lösung: 5 Punkte

Es sei M_1 der Mittelpunkt der Strecke BC und M_2 der des Quadrates ABFE. Nach der Umkehrung eines Teiles des Strahlensatzes ist dann $M_1M_2 \parallel CE$. Die zu CE parallele Ebene durch A und F geht durch M_2 und enthält somit die zu CE parallele Gerade durch M_2. Also geht sie durch M_1. Der Teilkörper, den sie vom Würfel ABCDEFGH abschneidet, ist folglich das Tetraeder $ABFM_1$. Sieht man das Dreieck ABF als Grundfläche und BM_1 als Höhe dieses Tetraeders an, so folgt, daß sein Volumen

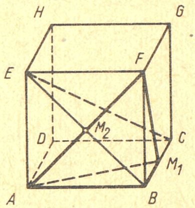


Abb. L 1041

$V_T = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{1}{2} a = \frac{1}{12} a^3$ beträgt.

Analog erhält man für die beiden anderen Schnitte ebenfalls als abgetrennte Körper Tetraeder mit dem Volumen V_T, wobei je zwei dieser Tetraeder keine gemeinsamen inneren Punkte haben.

Wegen $3V_T = \frac{1}{4} a^3$ beträgt infolgedessen das Volumen des Restkörpers $V_R = \frac{3}{4} a^3$.

151042) Lösung: 7 Punkte

Ein Quadrat besitzt genau vier Symmetrieachsen. Zwei enthalten die Diagonalen und zwei gehen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten. Im vorliegenden Fall liegen auf den Symmetrieachsen, die die Diagonalen enthalten, jeweils 6 Gitterpunkte. Hätte ein Streckenzug s mit den Eigenschaften (1),(2),(3) eine die Diagonale d enthaltende Symmetrieachse, so gäbe es in s einen Teil-Strecken-

zug t von einem der sechs Punkte auf d zu einem anderen, wobei t außer seinen Endpunkten keinen weiteren Punkt auf d enthielte. Dann käme in s auch der durch Spiegelung an d aus t entstehende Streckenzug t' vor. Dieser aber würde mit t zusammen bereits einen geschlossenen Streckenzug bilden, ohne daß alle gegebenen Punkte auf ihm liegen. Deshalb scheiden die die Diagonalen enthaltenden Geraden als Symmetrieachsen aus.
Die restlichen zwei Achsen teilen nun das Quadrat in vier Teilquadrate. Angenommen, ein Streckenzug s mit den Eigenschaften (1),(2),(3) könnte, nachdem er einmal (aus einem anderen Teilquadrat kommend) in das linke obere Teilquadrat q (Abb. L 1042a) eingetreten ist und dort einen Teil-Streckenzug t durchlaufen hat, q wieder verlassen, ohne alle 9 Punkte von q durchlaufen zu haben. Dann enthielte s auch den durch Spiegelung an der einen Symmetrieachse aus t entstehenden Streckenzug t' sowie die durch Spiegelung an der anderen Symmetrieachse aus t, t' entstehenden Streckenzüge t", t"'. Die Streckenzüge t,t',t"',t" würden bereits einen geschlossenen Streckenzug bilden, der nicht alle gegebenen Punkte enthielte. Daher genügt es, diejenigen Teil-Streckenzüge zu untersuchen, die alle 9 Punkte von q durchlaufen. Der gesamte Streckenzug s liegt aus Symmetriegründen dann fest und hat die geforderten Eigenschaften.

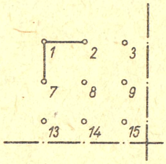


Abb. L 1042a

Der Streckenzug von 2 nach 1 und von da nach 7 kann bereits eingezeichnet werden, da der Punkt 1 nicht anders erreichbar ist.

Fall 1:
Der Streckenzug komme vom rechten Quadrat und erreiche den Punkt 3, verlaufe zu 2, 1, 7 und von dort weiter zum Punkt 13.
Dann liegt der restliche Verlauf des Streckenzuges eindeutig fest, da vom letzten der neun Punkte das linke untere Quadrat erreicht werden muß (Abb. L 1042b)

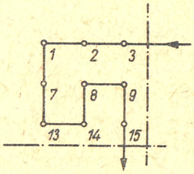


Abb. L 1042b

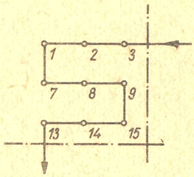


Abb. L 1042c

Fall 2:

Der Streckenzug verlaufe wie im Fall 1 bis zum Punkt 7 und weiter zum Punkt 8. Von dort an liegt der restliche Strecken zug eindeutig fest (Abb. L 1042c)

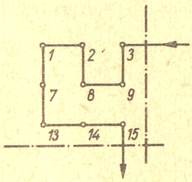


Abb. L 1042d

Fall 3:

Der Streckenzug verlaufe vom Punkt 3 zum Punkt 9. Eine Verlängerung zum Punkt 15 würde den in Abb. L 1042c gezeichneten, an einer Diagonalen gespiegelten Streckenzug ergeben. Bei einer Weiterführung vom Punkt 9 zum Punkt 8 ist der übrige Verlauf eindeutig festgelegt. (Abb. L 1042d)

Damit sind alle Möglichkeiten, mit dem Punkt 3 zu beginnen, ausgeschöpft.
Der Streckenzug beginne im Punkt 9.
Bei der Weiterführung über die Punkte 8 oder 15 wäre der Punkt 3 nicht mehr erreichbar, wenn der Streckenzug zum linken unteren Quadrat weitergeführt werden soll.

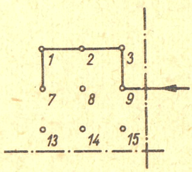


Abb. L 1042e

Fall 4:

Verlaufe der Streckenzug also über die Punkte 9, 3, 2, 1 und 7 (Abb. L 1042e). Bei der Weiterführung nach 13 könnte 8 nicht mehr einbezogen werden. Bei der Weiterführung nach 8 würde 13 oder 15 unerreichbar sein. Es gibt in diesem Falle also keinen derartigen Streckenzug.

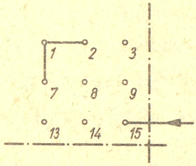
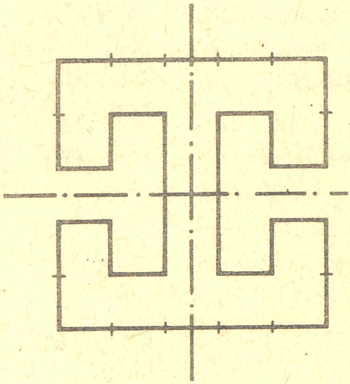


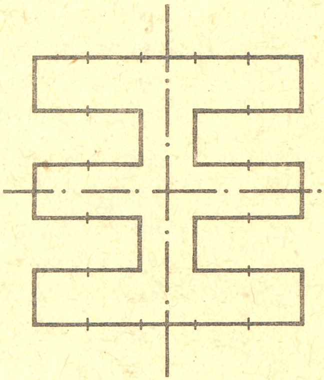
Abb. L 1042f

Fall 5: (Abb. L 1042f)
Der Streckenzug beginne im Punkt 15. Bei der Weiterführung nach 9 ergibt sich die gespiegelte Abb. L 1042d. Bei der Weiterführung nach 14 ergibt sich die gespiegelte Abb. L 1042b. Andere Möglichkeiten, den Streckenzug von Punkt 15 aus weiterzuführen, gibt es nicht.

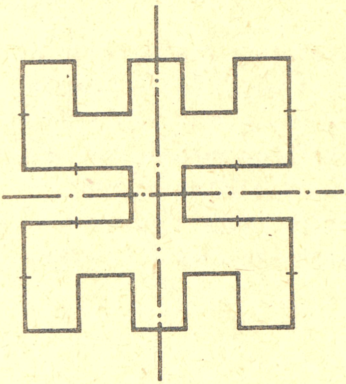
Damit ist gezeigt, daß es drei und nicht mehr als drei Streckenzüge der geforderten Art gibt. Die geschlossenen Streckenzüge haben folgende Formen:



Aus Abb. L 1042b



aus Abb. L 1042c



aus Abb. L 1042d

151043A) Lösung: 8 Punkte

Ist x eine reelle Zahl und $g = [x]$, so ist $x = g + a$ mit einer reellen Zahl a, für die $0 \leqq a < 1$ gilt. Ferner ist dann $[x]^2 = g^2$ und $x^2 = g^2 + 2ag + a^2$. Daher hat x genau dann die Eigenschaft $[x^2] = [x]^2$, wenn $0 \leqq 2ag + a^2 < 1$ gilt. (1)

1. Es sei x eine ganze Zahl. Dann gilt $a = 0$, und damit ist (1) erfüllt.

Also haben $x = -10, -9, \ldots, 1, 2$ die geforderten Eigenschaften.

2. Es sei $0 < a < 1$, d.h. x ist keine ganze Zahl, und entsprechend der Bedingung $-10 \leqq x < 2$ sei g eine der Zahlen $-10, -9, \ldots, 1$.

2.1. Es sei $g = -1$, d.h. $x < 0$. Dann ist $2g + a < 0$ und (1) nicht erfüllt.

2.2. Es sei $g = 0$, d.h. $0 < x < 1$. Dann ist (1) wegen $0 < a < 1$ erfüllt.

2.3. Es sei $g = 1$, d.h. $1 < x < 2$. Dann ist (1) genau für diejenigen a (mit $0 < a < 1$) erfüllt, die $(a+1)^2 < 2$ oder, wegen $a+1 > 0$ gleichbedeutend hiermit, $a+1 < \sqrt{2}$, d.h. $0 < a < \sqrt{2} - 1$ erfüllen, d.h. genau für $1 < x < \sqrt{2}$.

Damit ist bewiesen: Die gesuchten Zahlen x sind genau die ganzen Zahlen $-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2$ und alle reellen Zahlen x mit $0 \leqq x < \sqrt{2}$.

151P43B) Lösung: 8 Punkte

Wenn ein Punkt P(x;y) auf k liegt, so gilt $x \neq 0$ und $y = \frac{1}{x}$, also

$$\overline{F_1P} = \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{x} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 4 - \frac{2\sqrt{2}}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \sqrt{(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2})^2}$$

und ebenso

$$\overline{F_2P} = \sqrt{(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2})^2} .$$

Aus $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} > 2$ folgt, wenn $x > 0$ ist, $x + \frac{1}{x} > \sqrt{2}$, wenn aber $x < 0$ ist, $-(x + \frac{1}{x}) > \sqrt{2}$.

Im Falle $x > 0$ gilt daher $\overline{F_1P} = x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}$, $\overline{F_2P} = x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}$,

im Falle $x < 0$ aber $\overline{F_1P} = -(x + \frac{1}{x}) + \sqrt{2}$, $\overline{F_2P} = -(x + \frac{1}{x}) - \sqrt{2}$.

In beiden Fällen ist folglich $|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}| = 2\sqrt{2}$.

L 10;I

II. Wenn ein Punkt P(x;y) die Eigenschaft $\left|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}\right| = 2\sqrt{2}$ hat,
so folgt $\left|\sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2}\right| = 2\sqrt{2}$
und daraus der Reihe nach

$$2x^2 + 2y^2 + 8 - 8 = 2\sqrt{x^4 + y^2 + 2x^2y^2 - 16xy + 16}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 16xy + 16$$

$$16xy = 16, \text{ also } x \neq 0 \text{ und } y = \frac{1}{x}, \text{ d.h. } P \in k.$$

Also ist k die Menge aller Punkte P, für die $\left|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}\right| = c$ mit $c = 2\sqrt{2}$ gilt.

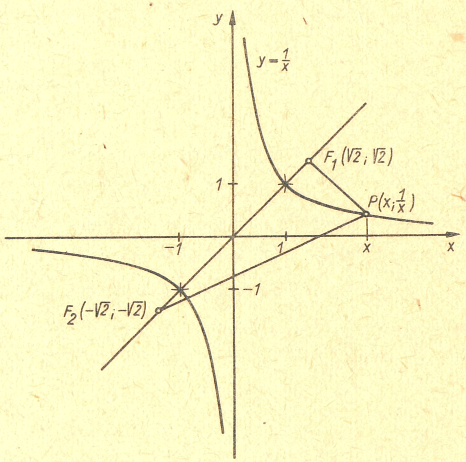


Abb. L 1043B

L 10;II XV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

151044) Lösung: 6 Punkte

Angenommen, für natürliche Zahlen x,y seien diese Bedingungen erfüllt. Dann gibt es natürliche Zahlen a,b mit $0 < a,b < 10$ und

$$\frac{x+y}{2} = 10a + b, \quad x \cdot y = (10b + a)^2, \text{ also}$$

$$(x + y)^2 = 4(100a^2 + 20ab + b^2),$$

$$4xy = 4(100b^2 + 20ab + a^2), \quad \text{also}$$

$$(x - y)^2 = 4 \cdot 99 \cdot (a^2 - b^2).$$

Daraus folgt zunächst $a > b$. Ferner folgt: $4 \cdot 99 \cdot (a - b)(a + b)$ ist eine Quadratzahl. Also ist die genau einmal in dem Produkt $4 \cdot 99$ enthaltene Primzahl 11 ein Teiler von $(a - b)(a + b)$. Wegen $0 < a - b < 9$ ist a-b nicht durch 11 teilbar, also muß a+b dies sein. Wegen $0 < a+b < 20$ folgt daher $a + b = 11$. Folglich muß a-b eine Quadratzahl sein. Wegen $a+b = 11$ ist genau eine der Zahlen a,b gerade, also ist a-b ungerade. Hiernach und wegen $0 < a-b < 9$ ergibt sich $a - b = 1$. Daraus und aus $a+b = 11$ folgt $a = 6$, $b = 5$, also

$$x + y = 2 \cdot (10a + b) = 130,$$

$$|x - y| = \sqrt{4 \cdot 99 \cdot 11} = 66.$$

Also können als x,y (in beliebiger Reihenfolge) nur die Zahlen 98, 32 die verlangten Eigenschaften haben.
Tatsächlich gilt

$$\frac{x+y}{2} = 65 \quad \text{und} \quad \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{3136} = 56.$$

Mithin erfüllt nur das ungeordnete Paar (98,32) die geforderten Bedingungen.

151045) Lösung: 7 Punkte

I. Angenommen, $\triangle$ ABC sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Der Berührungspunkt des Ankreises mit der Seite AC sei T, die Berührungspunkte dieses Ankreises mit den Strahlen aus B durch C bzw. aus B durch A seien U bzw. S. Der Mittelpunkt des Ankreises sei M, der des Inkreises I. Dann gilt nach dem Satz über Tangentenabschnitte von einem Punkt an einen Kreis:

$$\overline{BS} = \overline{BU},\ \overline{AS} = \overline{AT},\ \overline{CT} = \overline{CU}\ .$$

Ferner gilt

$$\overline{AB} = \overline{BS} - \overline{AS} = \overline{BU} - \overline{AS},\ \overline{BC} = \overline{BU} - \overline{CU},\ \overline{CA} = \overline{CT} + \overline{AT} = \overline{CU} + \overline{AS}$$

und mithin

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{BU} - \overline{AS} + \overline{BU} - \overline{CU} + \overline{CU} + \overline{AS} = 2\ \overline{BU}\ \text{, also}$$

$$s = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}\right) = \overline{BU}.$$

Da die Strahlen aus B durch S bzw. U die genannten Kreise mit den Mittelpunkten M und I berühren, liegen M und I nach einem bekannten Satz auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle$ SBU (Abb. L 1045).

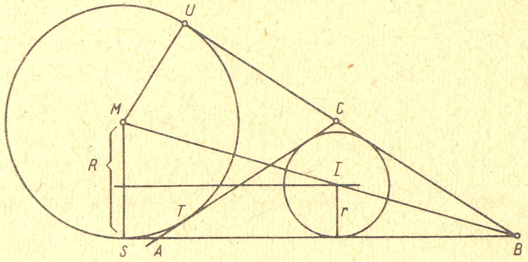


Abb. L 1045

Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügt, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man zeichnet eine Strecke der Länge s mit den Endpunkten B und S.

(2) Man errichtet in S die Senkrechte auf SB und trägt darauf eine Strecke der Länge R ab. Der andere Endpunkt dieser Strecke sei M.

(3) Man spiegelt SB an MB und erhält UB.

(4) Man zeichnet zu SB die Parallele im Abstand r. Schneidet sie MB in einem Punkt zwischen B und M, so sei I dieser Schnittpunkt.

(5) Man zeichnet die Kreise um M bzw. I mit den Radien R bzw. r.

(6) Man konstruiert, falls die unter (5) konstruierten Kreise sich nicht schneiden, eine ihrer inneren Tangenten. Ist das der Fall, so seien A bzw. B die Schnittpunkte dieser Tangente mit SB bzw. SU.

III. Jedes so konstruierte Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Laut Konstruktion hat das Dreieck ABC einen Inkreis vom Radius r und einen Ankreis an die Seite AC vom Radius R. Laut Konstruktion gilt ferner $s = \overline{BS} = \overline{BU} = \frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$.

IV. Die Konstruktionsschritte (1), (2), (3) und (5) sind stets eindeutig ausführbar. Der Konstruktionsschritt (4) ist genau dann ausführbar, wenn $R > r$ gilt, und in diesem Falle eindeutig ausführbar. Konstruktionsschritt (6) ist genau dann ausführbar, wenn $\overline{MI} \geq R + r$ gilt. Wegen $\overline{MI} = \overline{MB} - \overline{BI}$ und $\overline{MB} = \sqrt{s^2 + R^2}$ (Pythagoras) sowie $\overline{BI} = \frac{\overline{MB} \cdot r}{R}$ (Strahlensatz) ist diese Bedingung gleichwertig mit $\overline{MB} - \overline{BI} \geq R + r$, also auch mit $\sqrt{s^2 + R^2}\,(1 - \frac{r}{R}) \geq (R + r)$. (*)

Für $\overline{MI} = R + r$ erhält man genau eine gemeinsame Tangente und damit auch genau ein Dreieck ABC.

Für $\overline{MI} > R + r$ erhält man genau zwei gemeinsame Tangenten und genau zwei spiegelbildlich zu MB liegende kongruente Dreiecke.

Daher existiert genau dann ein den Bedingungen der Aufgabe entsprechendes Dreieck, wenn (*) gilt; und ist dies der Fall, so gibt es bis auf Kongruenz genau ein derartiges Dreieck.

151046) Lösung: 7 Punkte

Es sei (beispielsweise) definiert:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 3 \\ -1 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}.$$

L 10;II

Dann ist f eine für alle reellen Zahlen x definierte nullstellenfreie Funktion, und die durch $F(x) = f(2x) + f(3x)$ definierte Funktion F hat die Eigenschaft $F(1) = f(2) + f(3) = 1 + (-1) = 0$, es existiert also eine reelle Zahl x, nämlich $x = 1$, mit $F(x) = 0$, folglich ist F nicht nullstellenfrei. Also folgt aus der Voraussetzung, eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f sei nullstellenfrei, nicht, daß auch die durch $F(x) = f(2x) + f(3x)$ für alle reellen Zahlen x definierte Funktion F nullstellenfrei ist.