XV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

151031

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit der Seitenlänge $\overline{BC} = a$ und der Höhenlänge $\overline{AD} = h_a$. Die Gerade g sei die Parallele zu BC durch A.

Berechnen Sie das Volumen V des Körpers der durch Rotation der Dreiecksfläche ABC um g entsteht in Abhängigkeit von a und h_a!

151032

Gegeben sei eine Strecke AB mit $\overline{AB} = 5$ cm.
Man konstruiere die Menge aller Punkte P, die die Eigenschaft haben, Inkreismittelpunkt je eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit der Hypotenuse AB zu sein.

151033

Beim Druck einer Mathematikaufgabe wurde statt

$$(1 + a^2x^2) : x^2 = b$$

(mit gegebenen Zahlen a,b) versehentlich die Gleichung

$$(1 + a^2x^2) \cdot x^2 = b$$

(mit denselben Zahlen a,b) gedruckt. Trotzdem hatte die so entstandene Gleichung dieselbe nichtleere Lösungsmenge wie die ursprünglich vorgesehene Gleichung.
Man ermittle diese Lösungsmenge.

XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

151034

Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn für ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit den Höhen AA', BB' und CC' und dem Höhenschnittpunkt H die Gleichungen

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{HA'}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{HB'}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{HC'}}$$

gelten, so ist das Dreieck ABC gleichseitig.

151035

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 2$ und alle diejenigen natürlichen Zahlen $x > 0$, für die folgendes gilt:

Im Ziffernsystem mit der Basis n ist x eine zweistellige Zahl, und durch Vertauschen ihrer Ziffern erhält man das Doppelte von x. (Dabei sollen wie üblich für positive Zahlen nur solche Zifferndarstellungen zugelassen sein, die nicht mit 0 beginnen.)

151036

Vorbemerkungen: Ist x eine reelle Zahl, so wird mit $[x]$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als x ist:
$[x] \leq x < [x] + 1$.
Beispielsweise ist $[\pi] = 3$, $[-4,2] = -5$, $[5] = 5$.
[Ei]ne Funktion f, die für alle reellen x erklärt ist, heißt periodisch, wenn es eine Zahl $p > 0$ gibt, so daß für alle x gilt:
$f(x + p) = f(x)$.
Eine solche Zahl p heißt eine positive Periode von f. Gibt es eine kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft, so heißt sie die kleinste positive Periode von f. Beispielsweise ist $f(x) = 1$ eine periodische Funktion f, die keine kleinste positive Periode besitzt, während z. B. $f(x) = \sin x$ die kleinste positive Periode 2π besitzt.

a) Beweisen Sie, daß durch $y = (-1)^{[x]}$ eine für alle reellen Zahlen x erklärte Funktion f definiert ist!

A 10;II

b) Beweisen Sie, daß die unter a) erklärte Funktion f periodisch ist!

c) Weisen Sie nach, daß diese Funktion f eine kleinste positive Periode besitzt, und ermitteln Sie diese!

d) Stellen Sie f graphisch dar!

XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

151031) Lösung: **6 Punkte**

Für die Lage des Punktes D unterscheiden wir drei Fälle.

Fall 1: D fällt mit einem der Punkte B, C zusammen, oBdA mit dem Punkte B. Das Volumen V des Rotationskörpers ergibt sich dann als Differenz des Volumens V_z eines Zylinders mit dem Radius h_a und der Höhenlänge a und des Volumens V_k eines Kegels mit gleichem Radius und gleicher Höhenlänge (Abb. 1031).

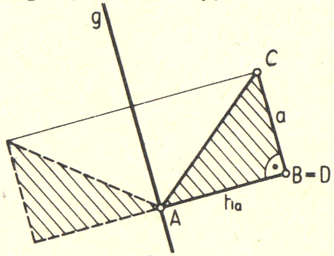

Abb. L 1031

$$V = V_z - V_k = \pi h_a^2 \cdot a - \frac{1}{3} \pi h_a^2 \cdot a = \frac{2}{3} \pi h_a^2 \cdot a.$$

Fall 2: D liegt zwischen B und C. Dann ist das Volumen V gleich der Differenz aus V und der Summe der Volumina V_{k_1} eines Kegels mit dem Radius h_a und der Höhenlänge $\overline{BD}$ und V_{k_2} eines Kegels mit gleichem Radius und der Höhenlänge $\overline{DC}$, wobei $\overline{BD} + \overline{DC} = \overline{BC} = a$ gilt (Abb. L 1031a).

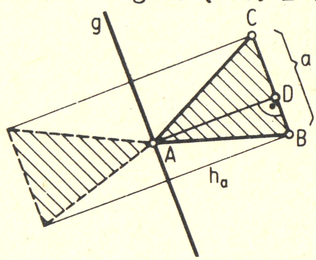

Abb. L 1031a

$$V = V_z - (V_{k_1} + V_{k_2}) = \pi h_a^2 \cdot a - \frac{1}{3}\pi h_a^2 \cdot (\overline{BD} + \overline{DC}) = \frac{2}{3}\pi h_a^2 \cdot a.$$

Fall 3: D liegt auf der Geraden durch B und C außerhalb von BC, oBdA so, daß C zwischen B und D liegt.
Dann ist das Volumen V gleich der Differenz aus der Summe der Volumina V_z und V_{k_2} und dem Volumen V_{k_1}, wobei diesmal

$\overline{BC} = \overline{BD} - \overline{CD} = a$ gilt (Abb. L 1031 b).

$$V = V_z + V_{k_2} - V_{k_1} = \pi h_a^2 \cdot a + \frac{1}{3}\pi h_a^2 \cdot \overline{CD} - \frac{1}{3}\pi h_a^2 \cdot \overline{BD}$$

$$= \pi h_a^2 \cdot \left[a + \frac{1}{3}(\overline{CD} - \overline{BD})\right]$$

$$= \pi h_a^2 \cdot (a - \frac{1}{3}a) = \frac{2}{3}\pi h_a^2 \cdot a.$$

Das Volumen V des betrachteten Rotationskörpers beträgt also in jedem Falle

$$V = \frac{2}{3}\pi a \cdot h_a^2 .$$

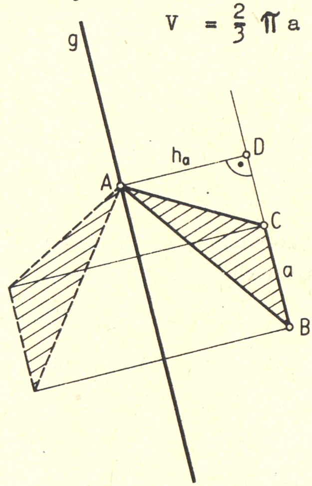

Abb. L 1031 b

151032) Lösung: 7 Punkte

I. Angenommen, P sei der Inkreismittelpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit der Hypotenuse AB. Dann liegt P nicht auf der Geraden g durch A, B. Sind α, β die Innenwinkelgrößen bei A bzw. B im Dreieck ABC, so ist $\alpha + \beta = 90^\circ$ und $\overline{\sphericalangle BAP} = \frac{\alpha}{2}$, $\overline{\sphericalangle ABP} = \frac{\beta}{2}$, also $\overline{\sphericalangle BAP} + \overline{\sphericalangle ABP} = 45^\circ$ und daher $\overline{\sphericalangle APB} = 135^\circ$. Ist M der Mittelpunkt des Umkreises k von $\triangle ABP$, so hat folglich derjenige Zentriwinkel, der zu dem P nicht enthaltenden Bogen $b' = \widehat{AB}$ von k gehört, die Größe 270°. Also ist $\triangle ABM$ ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB; folglich gilt $\overline{\sphericalangle BAM} = \overline{\sphericalangle ABM} = 45^\circ$, und da zu b' ein überstumpfer Zentriwinkel gehört, liegt M auf derselben Seite von g wie b', d. h. nicht auf derselben Seite von g wie P (Abb. L 1032).

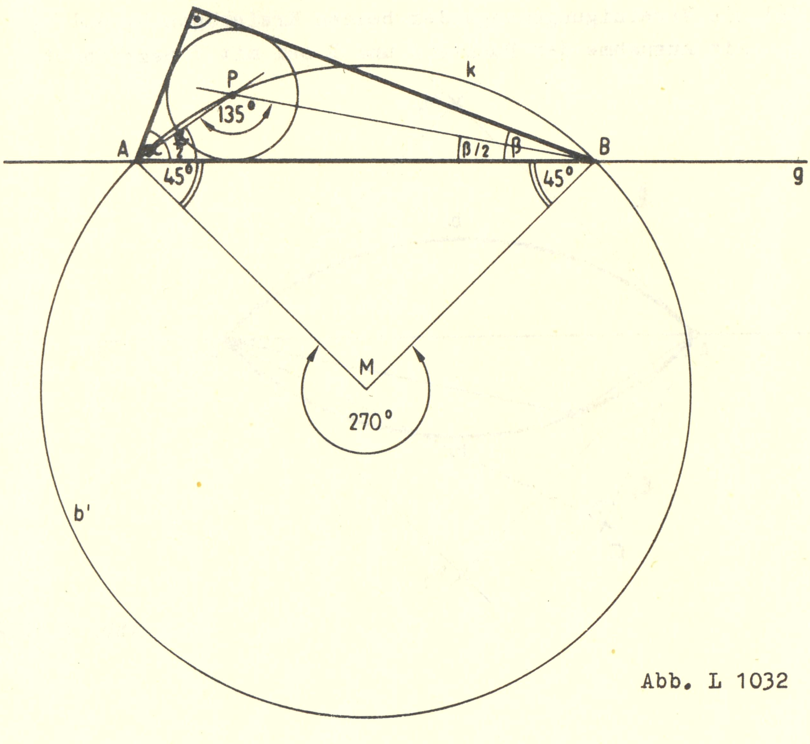

Abb. L 1032

Daher kann ein Punkt P nur dann der gesuchten Menge V angehören, wenn diese durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man zeichnet die Gerade g durch A und B. Sie teilt die Ebene in zwei Halbebenen ε_1 und ε_2.

(2) Man trägt an AB in A und B je einen Winkel von 45° so an, daß dessen freie Schenkel in ε_1 verlaufen und sich in M_1 schneiden.

(3) Man zeichnet den Kreis um M_1 mit dem Radius $\overline{M_1A} = \overline{M_1B}$. Der in ε_2 liegende Bogen dieses Kreises sei b_1 genannt.

(4) Man trägt an AB in A und B je einen Winkel von 45° so an, daß dessen freie Schenkel in ε_2 verlaufen und sich in M_2 schneiden.

(5) Man zeichnet den Kreis um M_2 mit dem Radius $\overline{M_2A} = \overline{M_2B}$. Der in ε_1 liegende Bogen dieses Kreises sei b_2 genannt.

(6) Die Vereinigungsmenge der beiden Kreisbögen b_1 und b_2 mit Ausnahme der Punkte A und B sei mit V bezeichnet.

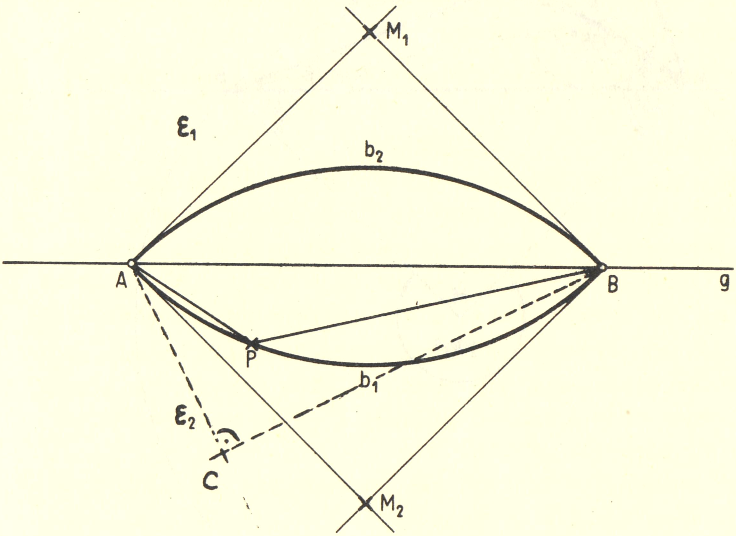

Abb. L 1032a

III. Jeder Punkt P der so konstruierten Menge V gehört der gesuchten Menge an. <u>Beweis</u>:

Nach Konstruktion sind die Dreiecke ABM_1 und ABM_2 gleichschenklig-rechtwinklig mit der Hypotenuse AB.
Liegt P ($\neq$ A, B) auf b_1, so ist $\sphericalangle APB$ ein in dem Kreis k_1 um M_1 mit $\overline{M_1A} = \overline{M_1B}$ liegender Peripheriewinkel; und der Zentriwinkel, der zu dem P nicht enthaltenden, d. h. in ε_1 gelegenen Bogen $b_1' = \overset{\frown}{AB}$ von k_1 gehört, ist überstumpf, da auch M_1 in ε_1 liegt. Somit hat dieser Zentriwinkel die Größe 270°, folglich gilt $\sphericalangle APB = 135^\circ$, also
$\sphericalangle BAP + \sphericalangle ABP = 45^\circ$. Trägt man an AB in A und B je einen Winkel der Größe $2 \cdot \sphericalangle BAP$ bzw. $2 \cdot \sphericalangle ABP$ so an, daß die freien Schenkel in ε_2 verlaufen, so schneiden sich diese folglich in einem Punkt C, für den $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC = 90^\circ$, also $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ gilt. In dem entstandenen rechtwinkligen Dreieck ABC mit AB als Hypotenuse ist P der Schnittpunkt zweier Innenwinkelhalbierenden, also der Inkreismittelpunkt. Daher gehört P der gesuchten Menge an.
Analog beweist man, daß jeder Punkt P ($\neq$ A, B) auf b_2 der gesuchten Menge angehört.

IV. Alle Konstruktionsschritte sind eindeutig ausführbar.

<u>151033) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

(I) Angenommen, für Zahlen a und b seien die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann hat die Gleichung $(1 + a^2x^2) : x^2 = b$ mindestens eine Lösung x. Daraus folgt $b \neq 0$; denn für keine Zahl a hat die Gleichung $(1 + a^2x^2) : x^2 = 0$ eine Lösung. Da ferner beide in der Aufgabe angegebenen Gleichungen mindestens eine gemeinsame Lösung x haben, so gilt für diese auch die nach Division der zweiten durch die erste entstehende Gleichung $x^4 = 1$. Hieraus folgt $x^2 = 1$, also $1 + a^2 = b$.
Somit können die Bedingungen der Aufgabe nur erfüllt sein, wenn $b = 1 + a^2$ ist.

(II) Zum Nachweis, daß für $b = 1 + a^2$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind, ermitteln wir zunächst die Lösungsmenge der Gleichung $(1 + a^2x^2) : x^2 = 1 + a^2$:

Angenommen, für eine Zahl x gelte diese Gleichung, dann folgt $1 + a^2x^2 = x^2 + a^2x^2$, also $x^2 = 1$. Daher können nur die Zahlen 1 und -1 Lösung sein. Sie sind dies auch; denn es gilt
$(1 + a^2 \cdot 1^2) : 1^2 = 1 + a^2$ und $(1 + a^2 \cdot (-1)^2) : (-1)^2 = 1 + a^2$.
Also hat $(1 + a^2x^2) : x^2 = 1 + a^2$ die Lösungsmenge $\{1, -1\}$.
Ferner ermitteln wir die Lösungsmenge der Gleichung
$(1 + a^2x^2) \cdot x^2 = 1 + a^2$:

Angenommen, für eine Zahl x gelte diese Gleichung. Dann folgt
$x^2 + a^2x^4 - 1 - a^2 = 0$, also $a^2(x^4 - 1) + x^2 - 1 = 0$,
$(x^2 - 1)(a^2(x^2 + 1) + 1) = 0$ und somit wegen
$a^2(x^2 + 1) + 1 \geqq a^2 \cdot 1 + 1 \geqq 1 > 0$ weiter $x^2 - 1 = 0$.

Daher können nur die Zahlen 1 und -1 Lösung sein. Sie sind dies auch; denn es gilt $(1 + a^2 \cdot 1^2) \cdot 1^2 = 1 + a^2$ und $(1 + a^2 \cdot (-1)^2) \cdot (-1)^2 = 1 + a^2$. Also hat auch $(1 + a^2x^2) \cdot x^2 = 1 + a^2$ die Lösungsmenge $\{1, -1\}$.

Daher sind die Bedingungen der Aufgabe genau für $1 + a^2 = b$ erfüllt, und die gesuchte Lösungsmenge ist $\{1, -1\}$.

XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

151034) Lösung: **5 Punkte**

Aus der Voraussetzung folgt: $\overline{AH} : \overline{CH} = \overline{HA'} : \overline{HC'}$ (1)

Nach dem Hauptähnlichkeitssatz gilt

$\triangle AC'H \sim \triangle HA'C$ (Scheitelwinkel, rechte Winkel)

und $\triangle ABA' \sim \triangle CBC'$ (gemeinsamer Winkel, rechte Winkel)

Daraus folgt $\overline{AH} : \overline{CH} = \overline{HC'} : \overline{HA'}$ (2)

und $\overline{AB} : \overline{CB} = \overline{AA'} : \overline{CC'}$ (3)

Nach (1) und (2) ergibt sich $\overline{HA'} : \overline{HC'} = \overline{HC'} : \overline{HA'}$

und damit $\overline{HC'} = \overline{HA'}$

Unter Berücksichtigung von (2)
folgt daraus $\overline{CH} = \overline{AH}$.

Durch Addition erhält man daraus $\overline{CC'} = \overline{AA'}$.

Durch Einsetzen in (3) ergibt sich $\overline{AB} = \overline{CB}$.

Analog verläuft der Beweis für $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Damit ist bewiesen, daß das Dreieck ABC gleichseitig ist.

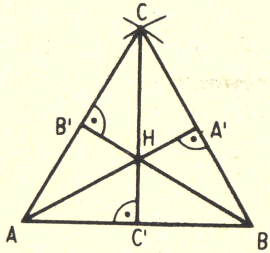

Abb. L 1034

151035) Lösung: **7 Punkte**

Angenommen, es gibt Positionssysteme mit Basen n und darin jeweils zweistellige Zahlen x mit den Ziffern a und b, welche die geforderten Eigenschaften haben, dann gilt:

$nb + a = 2(na + b)$ (✱) $(a > 0,\ b < n)$

Aus (✱) folgt $n = \frac{2b - a}{b - 2a}$. Da n positiv ist, unterscheidet man zwei Fälle: I. $2b - a < 0$ und $b - 2a < 0$ oder II. $2b - a > 0$ und $b - 2a > 0$. Fall I. entspricht nicht den Bedingungen der Aufgabe, denn wegen $a - 2b > 0$ und $2a - b > 0$ sowie $n = \frac{a - 2b}{2a - b} \geqq 2$ wäre $a - 2b \geqq 4a - 2b$, also $3a \leqq 0$, d. h. $a \leqq 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Im Falle II. folgt entsprechend $a \geqq 0$, wobei $a = 0$ genau für $n = 2$ gilt. Daraus folgt $n \geqq 3$.

Da a, b und n natürliche Zahlen > 1 sind, folgt $b - 2a \geqq 1$.
Aus $b - 2a = 1$ erhält man $n = 3a + 2$. Es sei nun $b - 2a = d \geqq 2$.
Dann müßte gelten $2b - a = 2(2a + d) - a = 3a + 2d$ und damit $n = \frac{3a + 2d}{d}$. Wegen $b < n$ würde nun $2a + d < \frac{3a + 2d}{d}$ oder $2ad + d^2 < 3a + 2d$ bzw. $d^2 - 2d + 1 + 2ad < 3a + 1$ bzw. $(d - 1)^2 + 2ad < 3a + 1$ gelten. Nun folgte aber aus $d \geqq 2$: $(d - 1)^2 \geqq 1$, also $2ad \geqq 4a$ und damit $(d - 1)^2 + 2ad \geqq 4a+1 > 3a+1$, im Widerspruch zur Annahme. Folglich ist $b = 2a + 1$, $n = 3a + 2$ die einzige Lösung.
Tatsächlich gilt

$$(3a + 2)(2a + 1) + a = 6a^2 + 8a + 2 = 2(3a^2 + 4a + 1) =$$
$$= 2((3a + 2)a + 2a + 1).$$

Es gibt mithin unendlich viele Positionssysteme, in welchen es zweistellige Zahlen der verlangten Eigenschaft gibt; und zwar in jedem dieser Positionssysteme genau eine zweistellige Zahl dieser Art. Für alle diese Positionssysteme gilt

$n = 3a + 2$ und $b = 2a + 1$, wobei a eine beliebige natürliche Zahl > 0 ist.

<u>151036) Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

a) Laut Definition von $[x]$ ist $[x] = g$ für jede reelle Zahl erklärt und eine ganze Zahl. Für alle ganzen Zahlen g ist ebenso $(-1)^g$ erklärt. Also ist durch $y = f(x) = (-1)^{[x]}$ eine Funktion f erklärt, die für alle reellen x existiert.

b) Wegen $(-1)^1 = -1$, $(-1)^2 = +1$, $(-1)^3 = -1$, $(-1)^4 = +1$ liegt die Vermutung nahe, daß $f(x + 2) = f(x)$ gilt.
Aufgrund der Definition von $[x]$ gilt genau dann $[x] = g$, wenn es eine reelle Zahl a mit $0 \leqq a < 1$ gibt, so daß $x = g + a$ ist.
Folglich gilt $x + 2 = g + 2 + a$ und, da $g + 2$ ebenfalls eine ganze Zahl ist, $[x + 2] = g + 2 = [x] + 2$.
Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x + 2) &= (-1)^{[x+2]} \\ &= (-1)^{[x]+2} \\ &= (-1)^{[x]} \cdot (-1)^2 = (-1)^{[x]}, \end{aligned}$$

d. h. $f(x + 2) = f(x)$, es existiert also ein p mit $p = 2$.

c) Wir zeigen, daß $p = 2$ die kleinste positive Periode ist:
Angenommen, es gäbe für f eine Periode p mit $0 < p < 2$. (1)
Dann wäre $0 < \frac{p}{2} < 1$ (2) und $-1 < -\frac{p}{2} < 0$. (3).
Es müßte $f(x + p) = f(x)$ für alle x gelten, also auch etwa für $x_o = -\frac{p}{2}$, d. h., es müßte $f(-\frac{p}{2}) = f(\frac{p}{2})$ sein.
Wegen (3) gilt aber $\left[-\frac{p}{2}\right] = -1$ und damit $f(-\frac{p}{2}) = -1$ und wegen (2) $\left[\frac{p}{2}\right] = 0$ und damit $f(\frac{p}{2}) = 1$, folglich ist $f(-\frac{p}{2}) \neq f(\frac{p}{2})$.
Daher ist $p = 2$ tatsächlich die kleinste Periode von f.

d)

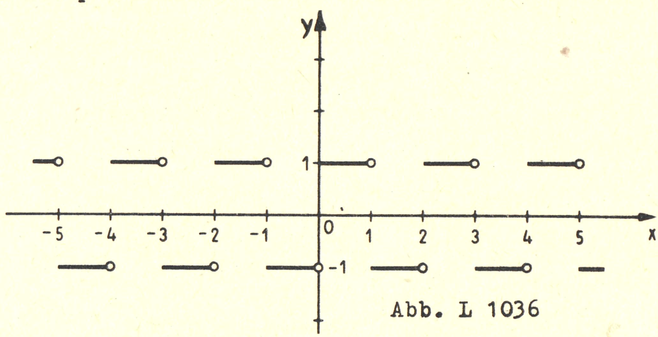

Abb. L 1036

Die so " o " bezeichneten Punkte gehören nicht zum Graph der Funktion.