XV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 10

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

151021

Vor dem Beginn eines Pferderennens fachsimpeln Zuschauer über den möglichen Einlauf der drei Favoriten A, B und C.

Zuschauer (1): "A oder C gewinnt"

" (2): "Wenn A Zweiter wird, gewinnt B."

" (3): "Wenn A Dritter wird, dann gewinnt C nicht."

" (4): "A oder B wird Zweiter."

Nach dem Einlauf stellte sich heraus, daß die drei Favoriten A, B, C tatsächlich die ersten drei Plätze belegten und daß alle vier Aussagen wahr waren.
Wie lautete der Einlauf?

151022

Hubert hat drei Kästchen, deren jedes eine Anzahl von Kugeln enthält. Er legt aus dem ersten Kästchen in jedes der beiden anderen soviele Kugeln hinein, wie jeweils schon darin sind. Dann legt er aus dem zweiten Kästchen in jedes der beiden anderen soviele Kugeln, wie nun zur Zeit jeweils darin sind. Schließlich legt er aus dem dritten Kästchen in jedes der beiden anderen soviele Kugeln, wie nun zur Zeit jeweils darin sind. Danach stellt er fest, daß in jedem der Kästchen genau 64 Kugeln sind.

Ermitteln Sie die Anzahl der Kugeln, die jedes der Kästchen ursprünglich enthielt!

A 10

<u>151023</u>

Die Eckpunkte der mit 1, 2, 3 und 4 gekennzeichneten Dreiecke seien sämtlich Gitterpunkte eines quadratischen Netzes (Abb. A 1023).

Ermitteln Sie von diesen vier Dreiecken alle, die untereinander ähnlich sind.

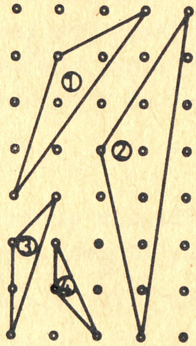

Abb. A 1023

<u>151024</u>

Für positive reelle Zahlen a und b gelte

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2.$ $\qquad (*)$

Es ist zu beweisen, daß dann für diese Zahlen

$a + b \geqq 2$ $\qquad (**)$ gilt.

Ferner sind alle positiven reellen Zahlenpaare (a,b) zu ermitteln, für die (*) gilt und für die in (**) das Gleichheitszeichen gilt.

XV. Olympiade Junger Mathematiker
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe

151021) Lösung: 8 Punkte

1. Lösungsweg: Wäre A Zweiter, so nach (2) B Erster im Widerspruch zu (1). Wäre A Dritter, so nach (1) C Erster im Widerspruch zu (3). Also wurde A Erster. Folglich wurde nach (4) B Zweiter und mithin C Dritter.
Der Aufgabenstellung kann entnommen werden, daß alle Bedingungen erfüllt werden können; also werden sie bei diesem (einzig als möglich verbliebenen) Einlauf erfüllt.
(Man kann auch wie im folgenden 2. Lösungsweg direkt bestätigen, daß bei dem Einlauf ABC, und nur bei diesem, alle Aussagen (1) bis (4) wahr sind.)

2. Lösungsweg: Da A, B, C die ersten drei Plätze belegten, sind genau folgende sechs Fälle möglich:

	Widerspruch zur Aussage
a) A B C	./.
b) A C B	(4)
c) B A C	(1)
d) B C A	(1), (4)
e) C A B	(2)
f) C B A	(3)

In fünf dieser Fälle entsteht ein Widerspruch zu wenigstens einer Aussage. Als einziger allen Bedingungen genügender Fall verbleibt a) mit der Reihenfolge ABC.

151022) Lösung: 10 Punkte

1. Lösungsweg:

Nimmt man an, anfangs seien im ersten Kästchen x, im zweiten y und im dritten z Kugeln, dann sind nach den drei Verteilungen folgende Anzahlen von Kugeln in den Kästchen:

Kästchen	1	2	3
Anfangs	x	y	z
1. Verteilung	$x-y-z$	$y+y$	$z+z$
2. Verteilung	$2(x-y-z)$	$2y-(x-y-z)-2z$	$4z$
3. Verteilung	$4(x-y-z)$	$2(2y-(x-y-z)-2z)$	$4z-2(x-y-z)-(3y-x$

Daher ist die Bedingung der Aufgabe nur erfüllt, wenn

(1) $4(x-y-z) = 64$,

(2) $-2x + 6y - 2z = 64$ und

(3) $-x - y + 7z = 64$ gilt. Hieraus folgt

$x = 104, \quad y = 56, \quad z = 32.$

Das erste Kästchen enthielt ursprünglich 104 Kugeln, das zweite 56 und das dritte 32 Kugeln.

2. Lösungsweg:

Nach der 3. Verteilung enthielt jedes der Kästchen 64 Kugeln. Da bei dieser Verteilung die Anzahl der Kugeln des 1. und 2. Kästchens verdoppelt wurde, enthielten diese nach der 2. Verteilung je 32 Kugeln, das dritte somit 128 Kugeln.

Da bei der 2. Verteilung die Anzahl der Kugeln des 1. und 3. Kästchens verdoppelt wurde, enthielten diese nach der 1. Verteilung 16 bzw. 64 Kugeln, das zweite somit zu diesem Zeitpunkt 112 Kugeln.

Da bei der 1. Verteilung die Anzahl der Kugeln des 2. und 3. Kästchens verdoppelt wurde, enthielten diese somit anfangs 56 bzw. 32 und das erste somit 104 Kugeln.

151023) **Lösung:** **12 Punkte**

Es sei O.B.d.A. die Seitenlänge eines "kleinsten Quadrates" des Gitternetzes mit 1 angenommen. Dann haben die Seiten der Dreiecke (als Rechtecksdiagonalen bzw. -seiten) die folgenden Längen:

Dreieck 1: $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$; 5

Dreieck 2: $\sqrt{13}$; $\sqrt{17}$; $5\sqrt{2}$

Dreieck 3: $\sqrt{2}$; 2 ; $\sqrt{10}$

Dreieck 4: 1 ; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$

Folglich sind die Dreiecke 1 und 4 ähnlich; denn es ist

$\sqrt{5} : 1 = \sqrt{10} : \sqrt{2} = 5 : \sqrt{5}$

Außerdem sind die Dreiecke 1 und 3 ähnlich; denn es ist

$\sqrt{5} : \sqrt{2} = \sqrt{10} : 2 = 5 : \sqrt{10}$.

Mithin sind die Dreiecke 1, 3, 4 untereinander ähnlich.

Wären die Dreiecke 2 und 4 ähnlich, so müßte wegen

$\sqrt{13} < \sqrt{17} < 5\sqrt{2}$ und $1 < \sqrt{2} < \sqrt{5}$ die Gleichung

$\sqrt{13} : 1 = \sqrt{17} : \sqrt{2}$ gelten, was nicht der Fall ist. Also sind die Dreiecke 2 und 4 <u>nicht</u> ähnlich. Folglich sind die Dreiecke 1, 3, 4 sämtliche untereinander ähnlichen der Dreiecke 1, 2, 3, 4.

151024) **Lösung:** **10 Punkte**

Es sei (a,b) ein Paar positiver reeller Zahlen, für das (✳) gilt. Dann gilt $(a - b)^2 \geqq 0$, also $a^2 - 2ab + b^2 \geqq 0$,

$a^2 + 2ab + b^2 \geqq 4ab$, $(a + b)(a + b) \geqq 4ab$, und wegen $ab > 0$

daher $(a + b)\frac{(a + b)}{ab} \geqq 4$ bzw.

$(a + b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geqq 4$, woraus wegen (✳)

die Behauptung (✳✳) folgt.

Das Gleichheitszeichen gilt genau für $a - b = 0$, d. h. genau für $a = b$, was zusammen mit (✳) genau für $a = b = 1$ zutrifft.