150931 ... 150933

1. Angenommen, drei aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen genügen den Bedingungen der Aufgabe. Dann gibt es eine positive ganze Zahl k so, daß diese drei Zahlen $2k-1$, $2k+1$ und $2k+3$ lauten. Für diese k gilt dann

$(2k-1)^2+(2k+1)^2+(2k+3)^2=1111x$

mit einer natürlichen Zahl x, für die $1 \leqq x \leqq 9$ gilt,

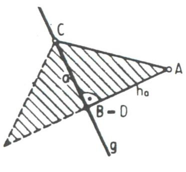
$$12k^2+12k+11=1111x, \text{ also}$$

$$k^2+ \quad k+ \quad 1=\frac{1111x+1}{12}.$$

Da k^2+k+1 eine ganze Zahl ist, muß wegen der Teilbarkeit durch 12 die Zahl $(1111x+1)$ eine gerade und folglich $1111x$ eine ungerade Zahl sein. Mithin kommen für x nur die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 in Frage. Für diese hat $1111x+1$ die Werte 1112, 3334, 5556, 7778, 10000, von denen nur 5556 durch 12 teilbar ist. Daher verbleibt nur die Möglichkeit $x=5$.

Daraus erhält man $k^2+k+1=463$ mit den Lösungen $k_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1849}$, von denen nur $k=21$ positiv ist. Daher können nur die aus $k=21$ als $2k-1$, $2k+1$, $2k+3$ entstehenden drei aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen 41, 43 und 45 den Bedingungen der Aufgabe genügen. Die Probe $41^2+43^2+45^2=1681+1849+2025=5555$ bestätigt, daß diese drei Zahlen die geforderten Bedingungen erfüllen.

2. Fall: 1) Der Fußpunkt D der Höhe h_a falle mit B oder C zusammen. Es entsteht ein gerader Kreiskegel mit dem Radius h_a und der Höhe a (siehe Bild):

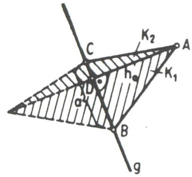


$$V=\frac{1}{3}\pi h_a{}^2\cdot a$$

Fall 2) Der Fußpunkt D sei innerer Punkt der Strecke BC. Dann gilt:

$$V=V_{k_1}+V_{k_2},$$

wobei K_1 der Kegel mit der Höhenlänge $\overline{BD}$ und K_2 der Kegel mit der Höhenlänge $\overline{CD}$ sein soll (siehe Bild).



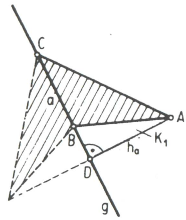
$$V=\frac{1}{3}\pi h_a{}^2\cdot\overline{BD}+\frac{1}{3}\pi h_a{}^2\cdot\overline{CD},$$

$$V=\frac{1}{3}\pi h_a{}^2\cdot(\overline{BD}+\overline{CD}), \text{ und wegen}$$

$\overline{BD}+\overline{CD}=a$ folgt

$$V=\frac{1}{3}\pi h_a{}^2\cdot a.$$

Fall 3) Der Fußpunkt D liege außerhalb der Strecke BC (siehe Bild).



Dann gilt

$$V=V_2-V_1,$$

wenn (o.B.d.A.) $\overline{DB}<\overline{DC}$ und K_2 der Kegel mit der Höhenlänge $\overline{DC}$ ist, also

$$V=\frac{1}{3}\pi h_a{}^2\cdot\overline{DC}-\frac{1}{3}\pi h_a{}^2\cdot\overline{DB},$$

und wegen $\overline{DC}-\overline{DB}=a$ folgt

$$V=\frac{1}{3}\pi h_a{}^2\cdot a.$$

Das Volumen V des durch Rotation der Dreiecksfläche entstandenen Körpers beträgt mithin in allen drei Fällen

$$V=\frac{1}{3}\pi a\cdot h_a{}^2.$$

3. I) Angenommen, eine Zahl x genügt der Forderung der Aufgabe. Dann ergibt sich: Aus D folgt: Gleichgültig, welche der beiden Aussagen wahr ist, x muß eine dreistellige natürliche Zahl sein. Aus C folgt: Wäre C_2 wahr, dann wäre auch C_1 wahr, was im Widerspruch zur Aufgabenstellung steht. Also ist C_2 falsch und demnach C_1 wahr.

Aus C_1 und D folgt, daß x eine dreistellige natürliche Zahl ist, die mit der Ziffer 3 beginnt.

Wäre D_2 wahr, dann müßte x die Zahl 333 sein. Für diese Zahl wären jedoch beide Aussagen B_1 und B_2 falsch. Demnach muß D_2 falsch und D_1 wahr sein.

zu 150933

Wäre B_2 wahr, dann müßte gelten

$$x+1=12n.$$

Dann würde daraus folgen

$$\begin{aligned} x+1-6 &= 12n-6 \\ x-5 &= 6(2n-1), \end{aligned}$$

d. h, auch Aussage B_1 wäre wahr.

Da das im Widerspruch zur Aufgabenstellung steht, muß B_2 falsch und B_1 wahr sein. Ist nun $x-5$ durch 6 teilbar, dann auch $x+1$, und da von zwei aufeinanderfolgenden Vielfachen von 6 genau eines durch 12 teilbar ist, $x+1$ aber nicht durch 12 teilbar sein darf, muß $x-5$ durch 12 teilbar sein.

Aus den bisherigen Aussagen folgt:

x ist eine Primzahl mit $300<x<399$.

Sie ist um 5 größer als ein Vielfaches von 12 und ungleich 389. Alle diese Bedingungen werden genau von den Zahlen 317 und 353 erfüllt.

Wäre nun A_2 wahr, dann käme nur die Zahl 353 in Frage, und damit wäre auch A_1 wahr. Folglich muß A_2 falsch sein, und damit entfällt 353.

Somit kann nur die Zahl 317 die in der Aufgabe genannte Forderung erfüllen.

II) Insbesondere ist hiermit gezeigt, daß außer der Zahl 317 keine Zahl der Forderung der Aufgabe genügt, d. h., es ist gezeigt, daß A_1 für die Zahl 317 wahr ist. Ferner sind B_1, C_1, D_1 für 317 wahr und A_2, B_2, C_2, D_2 für 317 falsch. Daher genügt 317 tatsächlich der Forderung der Aufgabe.

XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

150934) Lösung: **7 Punkte**

Angenommen, es gäbe n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren erste die Zahl a und deren Summe die Zahl 60 ist.

Dann gilt $a + (a + 1) + (a + 2) + \ldots + (a + (n-1)) = 60$.

Bei Verwendung der Summenformel für die natürlichen Zahlen erhält man $\frac{1}{2}n\,(2a + n - 1) = 60$ und somit

$$a = \frac{60}{n} - \frac{n-1}{2} \quad \text{oder} \quad a = \frac{120 - n^2 + n}{2n} .$$

Wäre $n \geq 12$, so wäre $n^2 - n = n(n-1) = 12 \cdot 11 > 120$, also $a < 0$. Also verbleiben nur die Möglichkeiten $n = 2, \ldots, 11$. Für diese hat $\frac{120 - n(n-1)}{2n}$ die in der nachstehenden Tabelle angegebenen Werte:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n(n-1)$	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110
$120-n(n-1)$	118	114	108	100	90	78	64	48	30	10
$2n$	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
$\frac{120-n(n-1)}{2n}$	$\frac{59}{2}$	19	$\frac{27}{2}$	10	$\frac{15}{2}$	$\frac{39}{7}$	4	$\frac{8}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{11}$

Daher können nur die Darstellungen als Summen aus den in (1), (2), (3) genannten Zahlen die Bedingungen der Aufgabe erfüllen:

(1) 19, 20, 21
(2) 10, 11, 12, 13, 14
(3) 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

Die Probe bestätigt, daß die Summe dieser Zahlen jeweils 60 ist.[x)]

x) <u>Hinweis</u>: Das Probieren kann auch wesentlich eingeschränkt werden, wenn man beachtet, daß aus

$\frac{1}{2}n\ (2a + n - 1) = 60$, also $n(2a + n - 1) = 120$ folgt,

daß $n \mid 120$ sein muß, und, falls n gerade ist, $8 \mid n$ gilt. Mithin bleiben nur noch $n = 3, 5, 8$ übrig.

<u>150935) Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Dabei seien a, b und c in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten BC, AC bzw. AB und α, β und γ die Größen der Innenwinkel bei A, B und C. Ferner schneide die Halbierende des Winkels $\sphericalangle ACB$ die Seite AB in D. Da jede Winkelhalbierende eines Dreiecks stets innerhalb des Dreiecks verläuft, liegt D zwischen A und B.

Es wird nun (oBdA) behauptet:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

<u>Beweis:</u>

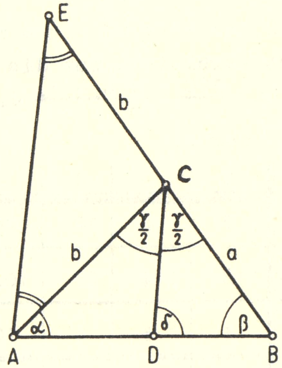


Abb. L 935

Man verlängert BC über C hinaus um b bis zum Punkt E. Wegen $\overline{AC} = \overline{EC}$ ist das Dreieck ACE gleichschenklig.
Also gilt
$\overline{\sphericalangle CAE} = \overline{\sphericalangle CEA}$ (als Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)
und ferner
$\overline{\sphericalangle CAE} + \overline{\sphericalangle CEA} = \gamma$ (nach dem Außenwinkelsatz).

Daraus folgt
$\overline{\sphericalangle CAE} = \frac{\gamma}{2}$.

Die Winkel $\sphericalangle CAE$ und $\sphericalangle ACD$ sind Wechselwinkel an geschnittenen Geraden und außerdem gleich groß. Folglich sind die Geraden CD und AE parallel.

Daher gilt nach einem der Strahlensätze

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} \quad \text{und wegen} \quad \overline{AC} = \overline{EC} = b$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \text{, w.z.b.w.}$$

150936) Lösung: 7 Punkte

Wegen $abc = 1$ gilt $c = \frac{1}{ab}$

Mithin gilt

$$\begin{aligned}(1 + a)(1 + b)(1 + c) &= (1 + a)\,(1 + b)\,\left(1 + \frac{1}{ab}\right)\\ &= (1 + a + b + ab)\,\left(1 + \frac{1}{ab}\right)\\ &= 1 + a + b + ab + \frac{1}{ab} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + 1\\ &= 2 + \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right). \qquad (*)\end{aligned}$$

Nun gilt für alle $x > 0$

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 &\geq 0, \quad \text{also}\\ x - 2 + \frac{1}{x} &\geq 0 \quad \text{bzw.}\\ x + \frac{1}{x} &\geq 2 \quad (1),\end{aligned}$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau für $x = 1$.

Wegen (1) folgt aus (*)

$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 2 + 2 + 2 + 2 = 8$, wobei das Gleichheitszeichen genau für $a = b = c = 1$ gilt, w.z.b.w..