XV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 9

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

150921

Klaus hat bei einer Hausaufgabe $4^2 - 3^2$ auszurechnen. Ihm fällt dabei auf, daß das Ergebnis 7 gleich der Summe der beiden benutzten Zahlen 4 und 3 ist. Als er seine Entdeckung an den Zahlen 10 und 11 überprüft, stellt er fest, daß auch hier
$11^2 - 10^2 = 21 = 11 + 10$ ist.
Ermitteln Sie alle Paare (a,b) natürlicher Zahlen mit $a > b$, für die die (positive) Differenz der Quadrate der beiden Zahlen gleich der Summe beider Zahlen ist!

150922

	A	B	C	D	E
a	1	2	3		
b					
c				5	
d					4
e					

Abb. A 922

In nebenstehendes Quadrat sollen die Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 so eingetragen werden, daß in jeder Zeile und Spalte und in den beiden Diagonalen jede der Ziffern von 1 bis 5 genau einmal vertreten ist. Die bereits eingetragenen Ziffern sollen dabei nicht verändert werden.

a) Geben Sie eine den Bedingungen entsprechende Eintragung an!
b) Untersuchen Sie, ob voneinander verschiedene den Bedingungen entsprechende Eintragungen möglich sind, und ermitteln Sie, wenn dies zutrifft alle derartigen Eintragungen!

A 9

(Die Buchstaben an den Rändern des Quadrates sollen die Beschreibungen des Lösungsweges erleichtern. So steht z. B. im Feld cD bereits die Ziffer 5, Kurzschreibweise cD:5).

150923

Gegeben seien die Seitenlänge a eines Quadrates ABCD sowie eine Länge m, für die $m \leq a$ gilt. Es sei M derjenige Punkt auf der Seite CD, für den $\overline{MD} = m$ gilt.

Gesucht ist ein Punkt N auf der Seite AD so, daß sich der Flächeninhalt des Dreiecks NMD zu dem des Quadrates ABCD wie 1 : 7 verhält.

Man ermittle alle diejenigen Werte von m, für die ein solcher Punkt N auf AD existiert, und hierzu jeweils die Länge der Strecke DN.

150924

Bei der Lösung der Aufgabe, ein Dreieck ABC aus $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ und $\overline{\sphericalangle BAC} = \alpha$ zu konstruieren, seien zwei zueinander nicht kongruente Dreiecke ABC_1 und ABC_2 entstanden, die den Bedingungen genügen.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\sphericalangle AC_1B$, wenn außerdem bekannt ist, daß er viermal so groß ist wie der Winkel $\sphericalangle AC_2B$!

XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

150921) Lösung: 8 Punkte

Laut Aufgabenstellung sind alle Paare (a,b) mit a, b natürlich und $a > b$ zu ermitteln, für die
$a^2 - b^2 = a + b$ gilt.

Nun ist nach einer binomischen Formel $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, und daher ist die geforderte Eigenschaft gleichwertig mit $(a + b)(a - b) = a + b$. Wegen a, b natürlich und $a > b$, ist $a + b \neq 0$. Also ist die genannte Eigenschaft weiterhin gleichwertig mit $a - b = 1$, d. h. die gestellte Bedingung wird genau von den Paaren (a,b) natürlicher Zahlen erfüllt, für die a um 1 größer ist als b.

Bemerkung zur Korrektur: Wird der Lösungsweg so dargestellt, daß (statt der logischen Äquivalenz) nur der Schluß von $a^2 - b^2 = a + b$ auf $a - b = 1$ ausgeführt wurde, so muß anschließend nachgewiesen werden, daß umgekehrt alle Paare (a,b) mit $a - b = 1$ auch die Eigenschaft $a^2 - b^2 = a + b$ haben

150922) Lösung: 12 Punkte

) In dem Feld aD kann nur noch die Ziffer 4 eingetragen werden, da die Zeile a bereits die Ziffern 1, 2, 3 enthält und in Spalte D die 5 steht. Gleiche Überlegungen führen zu aE:5. (Abb. L 922 a). Nun darf z. B. in eE nur noch 2 oder 3 stehen, da in der Spalte E bereits 5 und 4 sowie in den Diagonalen aA – eE die 1 stehen.

	A	B	C	D	E
a	1	2	3	4	5
b					
c				5	
d					4
e					

Sei eE:2, dann folgt eindeutig in dieser Reihenfolge:

	A	B	C	D	E
a	1	2	3	4	5
b	4	5	1	2	3
c	2	3	4	5	1
d	5	1	2	3	4
e	3	4	5	1	2

Abb. 922 b

dD:3; cC:4; bB:5; eA:3; cA:2; bA:4; dA:5; eD:1; bD:2; bC:1; eC:5; dC:2; eB:4; dB:1; cB:3; cE:1; bE:3 (Abb. L 922 b).

Die Kontrolle aller Zeilen, Spalten und Diagonalen zeigt, daß die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

b) Sei eE:3, dann folgt eindeutig in dieser Reihenfolge:

	A	B	C	D	E
a	1	2	3	4	5
b				3	
c	2		4	5	
d	3	1	5	2	4
e				1	3

Abb. L 922 c

dD:2; cC:4; eD:1; bD:3; dB:1; dC:5; dA:3; cA:2 (Abb. L 922 c)

Das Feld eA kann nun nach den Regeln der Aufgabe nicht mehr besetzt werden, da die schon besetzten Felder in der Spalte A und in der Diagonalen aE ⟶ eA bereits alle Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 enthalten. Also ist durch die Besetzung eE:3 keine weitere Eintragung zu erhalten; es gibt somit genau die in a) gefundene den Bedingungen entsprechende Eintragung.

150923) <u>Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

Für jeden Punkt N auf dem Strahl aus D durch A sei $\overline{DN} = n$ gesetzt. Dann hat das Dreieck NMD wegen $DN \perp DM$ den Flächeninhalt $\frac{1}{2}mn$. Dieser verhält sich genau dann zum Flächeninhalt a^2 von ABCD wie 1 : 7, wenn $\frac{1}{2}mn = \frac{1}{7}a^2$, d. h. $n = \frac{2a^2}{7m}$ gilt.

Ferner liegt D genau dann auf AC, wenn $n \leq a$ gilt.

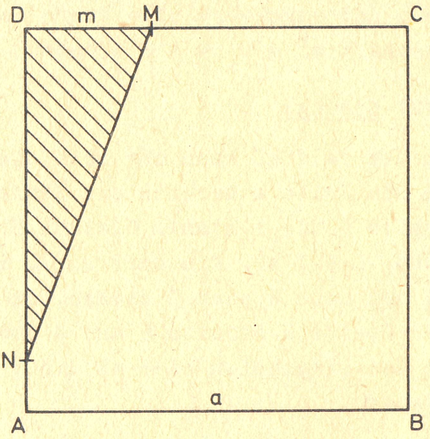

Abb. L. 923

L 9

Daher existiert zu gegebenem m genau dann ein Punkt N auf AD mit der verlangten Eigenschaft,

wenn

$$\frac{2a^2}{7\,m} \leqq a, \quad \text{d. h.} \quad m \geqq \frac{2}{7}\,a \quad \text{gilt.}$$

Zu jedem solchen m hat dann jeweils genau der Punkt N auf AD mit

$$\overline{DN} = \frac{2a^2}{7\,m}$$

die verlangte Eigenschaft.

150924) <u>Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

Da beide Dreiecke den gestellten Bedingungen genügen, muß $\overline{\sphericalangle BAC_1} = \overline{\sphericalangle BAC_2}$ gelten. Daher lassen sich die Dreiecke so legen, daß C_1 und C_2 auf demselben von A ausgehenden Strahl liegen. Ferner gilt $\overline{BC_1} = \overline{BC_2}$, also ist das Dreieck BC_1C_2 gleichschenklig.

Folglich gilt auch $\overline{\sphericalangle C_2C_1B} = \overline{\sphericalangle C_1C_2B}$ als Basiswinkel

Geht man von diesen (folglich spitzen) Winkeln zu $\sphericalangle AC_1B$, $\sphericalangle AC_2B$ über, so bedeutet dies bei demjenigen der beiden Scheitel C_1, C_2, der zwischen dem anderen und A liegt, den Übergang zum Nebenwinkel (des spitzen Winkels), also eine Vergrößerung, bei dem anderen keine Veränderung. Da nach Voraussetzung $\sphericalangle AC_1B$ größer als $\sphericalangle AC_2B$ ist, liegt somit C_1 zwischen C_2 und A, und es gilt

$$\overline{\sphericalangle AC_1B} + \overline{\sphericalangle C_2C_1B} = 180^\circ \text{ (Nebenwinkel), also}$$

$$\overline{\sphericalangle AC_1B} + \overline{\sphericalangle AC_2B} = 180^\circ$$

Da $\overline{\sphericalangle AC_1B} = 4 \cdot \overline{\sphericalangle AC_2B}$ ist, folgt daraus

$$5 \cdot \overline{\sphericalangle AC_2B} = 180^\circ \quad \text{und somit}$$

$$\overline{\sphericalangle AC_2B} = 36^\circ \quad \text{sowie} \quad \overline{\sphericalangle AC_1B} = 144^\circ.$$

L 9

Der Winkel $\sphericalangle AC_1B$ hat eine Größe von 144°.

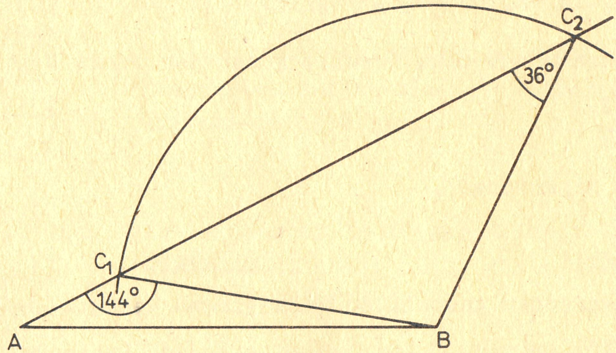

Abb. L 924