

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

150831

Vor vielen Jahren war ein Wanderer auf dem Wege von Altdorf nach Neudorf. Als er unterwegs nach dem Weg fragte, erklärte ihm ein Ortskundiger: "Ihr seid auf dem richtigen Weg und werdet bald an einer Weggabelung einen Wegweiser mit drei Richtungsschildern sehen.

Diese weisen auf die Wege nach Altdorf, Neudorf und Mittendorf. Ich mache Euch aber darauf aufmerksam, daß genau zwei dieser Richtungsschilder falsch beschriftet wurden." Der Wanderer bedankte sich, gelangte zum Wegweiser und las ihn.

Untersuche, ob der Wanderer mit den erhaltenen Informationen den Weg nach Neudorf ermitteln konnte.

150832

Beweise, daß alle Primzahlen $p > 3$ sich in der Form $6n + 1$ bzw. $6n - 1$ schreiben lassen, wobei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist!

150833

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC. Konstruiere in seinem Inneren einen Punkt P, so daß die Dreiecke ABP, BCP, ACP alle einander flächengleich sind!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob stets genau ein solcher Punkt P existiert!

150834

Eine Pioniergruppe wanderte von der Touristenstation A zum Bahnhof B. Sie legte in der ersten Stunde 3 km zurück. Danach rechnete sie sich aus, daß sie bei gleichbleibender Geschwindigkeit 40 Minuten zu spät zum Zug kommen würde. Deshalb erhöhte sie ihre durchschnittliche Marschgeschwindigkeit auf 4 km in der Stunde und kam damit 45 Minuten vor Abfahrt des Zuges in B an.

Berechne die Länge des Weges von A nach B!

150835

Es ist zu beweisen: Wenn in einem konvexen Viereck ABCD auf der Seite AB Punkte E und F so zwischen A und B liegen, daß $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ gilt, und auf der Seite BC Punkte G und H so zwischen B und C liegen, daß $\overline{BG} = \overline{GH} = \overline{HC}$ gilt, und auf der Seite CD Punkte I und K so zwischen C und D liegen, daß $\overline{CI} = \overline{IK} = \overline{KD}$ gilt, und auf der Seite DA Punkte L und M so zwischen D und A liegen, daß $\overline{DL} = \overline{LM} = \overline{MA}$ gilt, so sind die Geraden durch M, E und I, H sowie die durch F, G und K, L jeweils parallel zueinander.

150836

Für ein Viereck ABCD sei gefordert, daß die Summe der Längen der beiden Diagonalen AC und BD 11 cm beträgt, daß die Seite AB die Länge $a = 6$ cm und die Seite AD die Länge $d = 1$ cm haben soll.

Ermittle eine Länge x und eine Länge y so, daß für den Umfang u jedes Vierecks, das den angegebenen Forderungen genügt, die Ungleichung $x \leq u \leq y$ gilt, wobei das Gleichheitszeichen jeweils genau dann gilt, wenn das Viereck ABCD zu einer Strecke entartet, d. h., wenn die Punkte A, B, C, D auf ein und derselben Geraden liegen!

Hinweis: ABCD kann auch nicht-konvex sein. Ferner können beim Entartungsfall auch Punkte zusammenfallen.

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

150831) Lösung:

5 Punkte

Nach den Erklärungen des Ortskundigen würden alle drei Richtungsschilder auf den richtigen Weg weisen, wenn die beiden falschen Schilder miteinander ausgetauscht würden, da genau zwei der drei Schilder falsch und folglich genau eines richtig beschriftet waren. Weil der Wanderer aus Altdorf kam, konnte er leicht feststellen, ob das Richtungsschild, das nach Altdorf wies, richtig oder falsch beschriftet war. Wenn es richtig beschriftet war (a), mußten die beiden anderen falsch sein, und er ging den Weg, auf welchen das Schild "Mittendorf" wies.

Wenn es aber falsch beschriftet war (b), (c), konnte er sich dieses Schild mit dem Richtungsschild "Altdorf" vertauscht denken, und dann wiesen alle drei Schilder - auch das nach Neudorf - in die richtige Richtung.

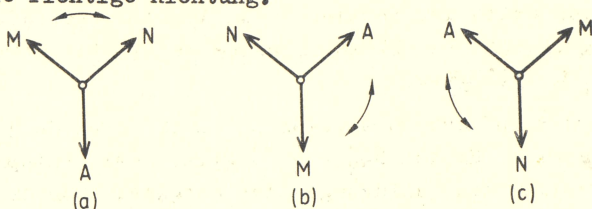


Abb. L 831 a, b, c

150832) Lösung:

7 Punkte

Jede Primzahl $p > 3$ ist weder durch 2 noch durch 3 teilbar und daher von keiner der Formen $6n = 2 \cdot 3n$, $6n + 2 = 2(3n + 1)$, $6n + 3 = 3(2n + 1)$, $6n + 4 = 2(3n + 2)$ mit ganzzahligem n . Da sie aber wie jede ganze Zahl von einer der Formen $6n + r$ mit ganzzahligen n, r und $0 \leq r \leq 5$ ist, gilt entweder

III. Jeder so konstruierte Punkt P entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion liegt P ebenso wie Q_1 auf derselben Seite der Geraden durch A und B wie C. Ferner liegt P ebenso wie Q_2 auf derselben Seite der Geraden durch B und C wie A. Weiterhin schneidet p_1 die Strecke BC in einem Punkt Q_3 , der folglich auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegt wie B. Da Q_2 zwischen Q_1 und C liegt, liegt der Schnittpunkt P von p_1 mit p_2 zwischen Q_1 und Q_3 und damit ebenfalls auf derselben Seite der Geraden durch A und C wie B. Damit ist gezeigt, daß P im Innern von $\triangle ABC$ liegt *). Sind ferner h_c, h'_c die Längen der Höhen auf die Gerade durch A und B in den Dreiecken ABC, ABP und sind h_a, h'_a die Längen der Höhen auf die Gerade durch B und C in den Dreiecken ABC, PBC, so ist nach Konstruktion $h'_c = \frac{1}{3} h_c$, $h'_a = \frac{1}{3} h_a$. Daher haben die Dreiecke ABP und PBC je ein Drittel des Flächeninhalts von $\triangle ABC$ als Flächeninhalt. Dasselbe gilt auch für $\triangle ACP$; denn da P im Innern von $\triangle ABC$ liegt, setzt sich $\triangle ABC$ aus den Dreiecken ABP, PBC, ACP zusammen.

IV. Da die Seiten AB und BC des Dreiecks ABC nicht parallel zueinander und folglich p_1 und p_2 ebenfalls nicht parallel zueinander sind, schneiden sie einander in genau einem Punkt. Somit existiert stets genau ein Punkt P, der die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

*) Hinweis: Vom Schüler braucht ein derart detaillierter Beweis dieser Aussage nicht verlangt zu werden.

Übrigens lassen sich auch bei Benutzung des Satzes über den Schwerpunkt im Dreieck ABC Eindeutigkeitsuntersuchungen wie in I nicht vermeiden.

150834) Lösung:8 Punkte

Die Entfernung von A nach B betrage s km. Die Pioniergruppe hat beim Anstellen ihrer Überlegung bereits 3 km zurückgelegt, muß also noch $(s - 3)$ km bewältigen. Bei gleichförmiger Bewegung ist die Zeit der Quotient aus Weg und Geschwindigkeit.

Bei beiden Geschwindigkeiten $v_1 = 3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ bzw. $v_2 = 4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ist die Zeit t vom Beginn der Geschwindigkeitserhöhung bis zur Abfahrt des Zuges gleich. Diese Zeit in Stunden beträgt somit

$$t = \frac{s-3}{v_1} - \frac{2}{3} \quad \text{bzw.} \quad t = \frac{s-3}{v_2} + \frac{3}{4}.$$

Nach Einsetzen der Werte für v_1 bzw. v_2 erhält man daraus

$$\frac{s-3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{s-3}{4} + \frac{3}{4} \quad \text{bzw.}$$

$$4s - 12 - 8 = 3s - 9 + 9, \quad \text{also}$$

$$s = 20.$$

Die Länge des Weges von A nach B beträgt somit 20 km.

150835) Lösung:6 Punkte

Nach Voraussetzung gilt:

$$\overline{AM} : \overline{AD} = 1 : 3 = \overline{AE} : \overline{AB}.$$

Daraus folgt nach der Umkehrung des 1. Teiles des Strahlensatzes $ME \parallel DB$. Ebenso folgt $IH \parallel DB$, also gilt $ME \parallel IH$.

Da ferner ABCD konvex ist, liegt C und folglich auch IH außerhalb von $\triangle ABD$, während ME innerhalb $\triangle ABD$ liegt. Also sind die Gerade durch M, E, und die Gerade durch I, H

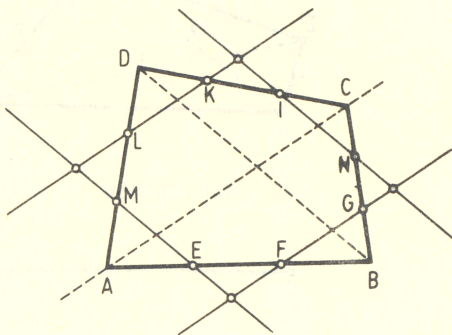


Abb. L 835

L 8;II

zwei voneinander verschiedene Parallelen. Die gleiche Aussage ergibt sich für die Gerade durch F, G und die Gerade durch L, K. Daraus folgt die Behauptung.

150836) Lösung:

7 Punkte

Es sei $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{AC} = e$, $\overline{BD} = f$. Nach der Dreiecksungleichung, angewandt auf die Dreiecke ABD, ABC und ACD, gilt (alle Längenangaben in Zentimeter)

$$5 < f < 7 \quad , \quad (1)$$

$$6 - e < b < 6 + e, \quad (2)$$

$$e - 1 < c < e + 1. \quad (3)$$

Aus (1) und $e + f = 11$ folgt

$$4 < e < 6. \quad (4)$$

Aus (2), (3) und (4) folgt

$$5 < b+c < 2e + 7 < 19.$$

Hieraus und aus $u = b + c + 7$ folgt

$$12 < u < 26.$$

Wie Abb. L 836 zeigt, treten diese Längen $x = 12$ (cm) und $y = 26$ (cm) im Entartungsfall tatsächlich auf, sind daher die gesuchten Längen. Daher gilt $12 \leq u \leq 26$.

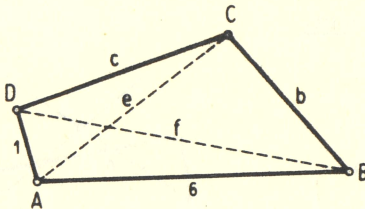


Abb. L 836

