XV. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 8

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktion, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

150821

Die Wägung eines mit Wasser gefüllten Gefäßes ergab eine Gesamtmasse (Gefäß- und Wassermasse) von 2000 g. Gießt man 20% des Wassers ab, so verringert sich diese gewogene Gesamtmasse auf 88%.

Berechne die Masse des leeren Gefäßes!

150822

Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geqq 1$, für die unter den sechs Zahlen

$n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$, $n + 5$, $n + 6$ ein Paar gefunden werden kann, in dem die erste Zahl des Paars ein echter Teiler der zweiten Zahl des Paares ist!

Nenne (für jedes solche n) alle derartigen Paare!

150823

Es sei k ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M. Ferner sei AB eine Sehne von k, die nicht Durchmesser von k ist. Auf dem Strahl aus A durch B sei C der Punkt außerhalb AB, für den $\overline{BC} = r$ gilt. Der Strahl aus C durch M schneide k in dem außerhalb CM gelegenen Punkt D.

Beweise, daß dann $\overline{\sphericalangle AMD} = 3 \cdot \overline{\sphericalangle ACM}$ gilt!

A 8

<u>150824</u>

Gegeben seien zwei parallele Geraden g_1 und g_2 mit dem Abstand a und außerdem ein Punkt P in beliebiger Lage zwischen g_1 und g_2.

Konstruiere einen Kreis k, der g_1 und g_2 berührt und durch P geht!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob durch die Aufgabenstellung ein Kreis eindeutig bestimmt ist!

XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

150821) **Lösung:** 9 Punkte

Die von der Gesamtmasse 2000 g genommenen 12%, das sind $\frac{12}{100} \cdot 2000\text{ g} = 240\text{ g}$, sind laut Aufgabe genau 20%, d. h. in Fünftel der Masse des Wassers.

Wegen $240\text{ g} \cdot 5 = 1\,200\text{ g}$ enthielt das Gefäß also 1 200 g Wasser.

Mithin beträgt die Masse des leeren Gefäßes 800 g.

150822) **Lösung:** 11 Punkte

Wenn bereits das Doppelte der kleinsten der sechs Zahlen $(n+1)$ die größte $(n+6)$ übertrifft, also $2(n+1) > (n+6)$ und mithin $n > 4$ gilt, kann aus den sechs Zahlen sicher kein geordnetes Paar mit den geforderten Teilbarkeitseigenschaften gefunden werden. Da aus $n > 4$ stets auch $2(n+1) > (n+6)$ folgt, kann n höchstens gleich 1, 2, 3, 4 sein. Analog stellt man fest, daß höchstens für $n = 1$ eine der sechs Zahlen das Dreifache einer anderen sein kann und daß das Vierfache wegen $4(n+1) \geqq (n+7) > (n+6)$ nicht auftreten kann. Aus analogen Gründen sind höhere Vielfache erst recht nicht möglich.

Es sei $n = 1$. Unter den Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7 gilt $2|4$, $2|6$ und $3|6$. Weitere Teilbarkeitsbeziehungen treten nicht auf. Folglich erhalten wir in diesem Fall genau die Zahlenpaare $(2;4)$, $(2;6)$, $(3;6)$.

Es sei $n = 2$. Unter den Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, 8 treten genau die Teilbarkeitsbeziehungen $3|6$ und $4|8$ auf. Man erhält mithin genau die Paare $(3;6)$, $(4;8)$.

<u>Es sei n = 3.</u> Dann erhält man aus den Zahlen 4, 5, 6, 7, 8, 9 genau das Paar $(4;8)$.

<u>Es sei n = 4.</u> Aus den Zahlen 5, 6, 7, 8, 9, 10 erhält man genau das Paar $(5;10)$. Damit sind alle gesuchten Paare ermittelt.

150823) <u>Lösung:</u> <u>9 Punkte</u>

Der Winkel $\sphericalangle$ AMD ist Außenwinkel des Dreiecks ACM.

Folglich gilt: $\overline{\sphericalangle AMD} = \overline{\sphericalangle ACM} + \overline{\sphericalangle MAC}$. (Abb. L 823)

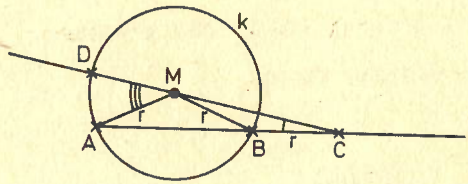

Abb. L 823

Nun gilt:

$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{BC} = r$.

Folglich sind die Dreiecke ABM und BMC gleichschenklig.

Daher gilt:

$$(\overline{\sphericalangle MAC} =)\,\overline{\sphericalangle MAB} = \overline{\sphericalangle MBA} \qquad (1) \text{ und}$$

$$\overline{\sphericalangle BMC} = \overline{\sphericalangle BCM}\ (= \overline{\sphericalangle ACM}) \qquad (2)$$

Der Winkel $\sphericalangle$ MBA ist Außenwinkel des Dreiecks BMC und wegen (2) daher doppelt so groß wie $\sphericalangle$ ACM.

Folglich ist wegen (1) $\sphericalangle$ MAC doppelt so groß wie $\sphericalangle$ACM und mithin $\sphericalangle$ AMD dreimal so groß wie $\sphericalangle$ ACM, w.z.b.w..

150824) <u>Lösung:</u> <u>11 Punkte</u>

(I) Angenommen, k sei ein Kreis, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht (vgl. Abb. L 824).

Sein Mittelpunkt M liegt erstens auf der Mittelparallelen g_M zu g_1 und g_2 und zweitens (da sein Radius folglich $\frac{a}{2}$ beträgt) auf dem Kreis um P mit dem Radius $\frac{a}{2}$.

Daher entspricht ein Kreis nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion gewonnen werden kann:

L 8

(II) (1) Wir konstruieren die Mittelparallele g_M zu g_1 und g_2.

(2) Wir zeichnen um P einen Kreis mit $\frac{a}{2}$, schneidet er g_M, so sei M einer der Schnittpunkte.

(3) Wir zeichnen um M den Kreis k mit $\frac{a}{2}$.

(III) Jeder so konstruierte Kreis k genügt den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion beträgt der Abstand von M zu g_1 und g_2 jeweils $\frac{a}{2}$, g_1 und g_2 sind somit Tangenten an k. Ferner gilt auch nach Konstruktion $\overline{MP} = \frac{a}{2}$.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist stets eindeutig ausführbar. Da P zwischen g_1 und g_2 liegt, ist der Abstand von P zu g_M kleiner als $\frac{a}{2}$. Also existieren stets genau zwei Schnittpunkte von g_m mit dem Kreis um P mit $\frac{a}{2}$.
Es entstehen somit stets genau zwei Kreise, die den geforderten Bedingungen genügen.

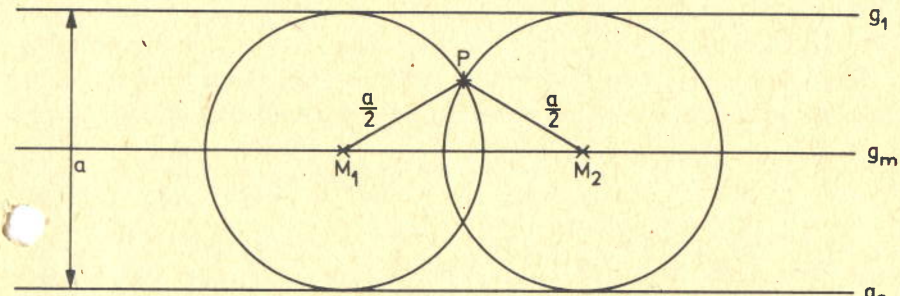

Abb. L 824