A 7;I

XV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 7 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

150731

Die Fußballmannschaften der Klassen 7a, 7b, 8a und 8b belegten beim Schulsportfest die ersten vier Plätze.
Auf die Frage, welchen Platz jede der vier Mannschaften belegte, gaben die Pioniere Antje, Benno und Chris jeder zwei Antworten, von denen jeweils eine wahr und eine falsch ist.

Antje: (1) Die Mannschaft der Klasse 8a belegte den zweiten Platz.
(2) Die Mannschaft der Klasse 8b belegte den dritten Platz.

Benno: (3) Die Mannschaft der Klasse 8a belegte den ersten Platz.
(4) Die Mannschaft der Klasse 7b belegte den zweiten Platz.

Chris: (5) Die Mannschaft der Klasse 7a belegte den zweiten Platz.
(6) Die Mannschaft der Klasse 8b belegte den vierten Platz.

Untersuche, welche Verteilungen der vier Mannschaften 7a, 7b, 8a und 8b auf die vier Plätze den wahren Antworten der Pioniere entsprechen!

150732

In der abgebildeten Figur (Abb. A 732) gelte:

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BDC = \beta$,

$\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCF = \gamma$, $\sphericalangle BCD = \delta$, $\sphericalangle AED = \varepsilon$,

$\sphericalangle CED = \eta$, $\sphericalangle EDC = \varphi$.

A 7;I

Es sei $\delta = 70^\circ$

Ermittle α, β, γ, ε, η und φ !

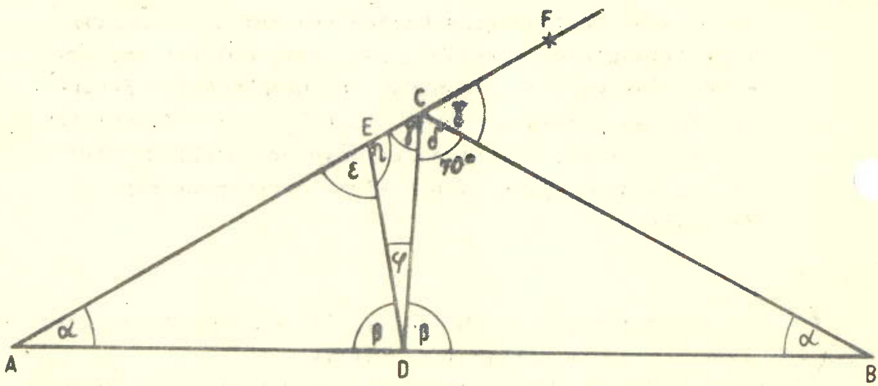


Abb. A 732

150733

Untersuche, ob sich in der Ebene fünf (paarweise) verschiedene Geraden so zeichnen lassen, daß sie genau drei Schnittpunkte miteinander haben. d. h., ob es in einer Ebene 5 (paarweise) verschiedene Geraden p, q, r, s, t und 3 (paarweise) verschiedene Punkte A, B, C so gibt, daß jeder der Punkte A, B, C der Schnittpunkt (mindestens) zweier der Geraden p, q, r, s, t ist und daß jeder Schnittpunkt (mindestens) zweier dieser Geraden einer der Punkte A, B, C ist!

XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

150734

Ein Zug fährt genau 15 Minuten später von einem Bahnhof B ab, als es der Fahrplan vorsieht. Deshalb fährt er mit 120 % der auf dieser Strecke üblichen Durchschnittsgeschwindigkeit so lange, bis der Rückstand aufgeholt ist. Nach wieviel Minuten (gerechnet von der tatsächlichen Abfahrtszeit des Zuges an) ist das der Fall?

150735

Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G und H (vergl. Abb. A 735). K sei der Schnittpunkt der Flächendiagonalen AH und DE.

Beweise: Es gilt $DE \perp BK$.

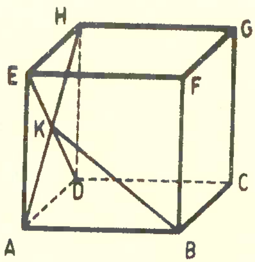


Abb. A 735

150736

Ist z eine natürliche Zahl, so sei a die Quersumme von z, b die Quersumme von a und c die Quersumme von b.
Ermittle c für jede 1 000 000 000-stellige durch 9 teilbare Zahl z!

Krüger

L 7;I

XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 7 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

150731) Lösung: 5 Punkte

Angenommen, (1) wäre wahr. Dann hätte die Mannschaft der Klasse 8a den zweiten Platz belegt, also wäre (3) falsch und somit (4) wahr. Das steht im Widerspruch zur Annahme. Deshalb ist (1) falsch und somit (2) wahr, d. h., die Mannschaft der Klasse 8b belegte den dritten Platz. Daraus folgt, daß (6) falsch und somit (5) wahr ist. Den zweiten Platz belegte mithin die Mannschaft der Klasse 7a. Daraus folgt, daß die Aussage (4) falsch und somit (3) wahr ist, d. h. den ersten Platz belegte die Mannschaft der Klasse 8a. Für den vierten Platz verbleibt dann nur noch die Mannschaft der Klasse 7b.

Daher kann nur die folgende Verteilung den Bedingungen der Aufgabe entsprechen:
Den ersten Platz belegte die Mannschaft der Klasse 8a,
den zweiten die Mannschaft der Klasse 7a,
den dritten die Mannschaft der Klasse 8b und
den vierten die Mannschaft der Klasse 7b.

Diese Verteilung entspricht in der Tat den Bedingungen; denn bei ihr sind die Aussagen (2), (3), (5) wahr und (1), (4), (6) falsch.

150732) Lösung: 7 Punkte

Die drei Winkel mit dem Scheitelpunkt C bilden zusammen einen gestreckten Winkel. Folglich gilt

$2\gamma + 70^\circ = 180^\circ$, woraus man

$2\gamma = 110^\circ$ bzw.

$\underline{\underline{\gamma = 55^\circ}}$ erhält.

Der Winkel $\sphericalangle$ BCF ist Außenwinkel des gleichschenklichen Dreiecks ABC. Also gilt nach dem Außenwinkelsatz

$$\gamma = 2\alpha \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \frac{\gamma}{2},$$

woraus man $\underline{\underline{\alpha = 27{,}5^\circ}}$ erhält.

Nun gilt nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck, angewandt auf $\triangle$ BDC:

$$\alpha + \beta + \delta = 180^\circ, \text{ also}$$
$$27{,}5^\circ + \beta + 70^\circ = 180^\circ \text{ und mithin}$$
$$\underline{\underline{\beta = 82{,}5^\circ}}.$$

Die drei Winkel mit dem Scheitelpunkt D bilden ebenfalls einen gestreckten Winkel. Also gilt

$$2\beta + \varphi = 180^\circ \text{ und folglich}$$
$$165^\circ + \varphi = 180^\circ \text{ bzw.}$$
$$\underline{\underline{\varphi = 15^\circ}}.$$

Nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck, angewandt auf $\triangle$ ECD gilt:

$$\eta + \gamma + \varphi = 180^\circ \text{ bzw.}$$
$$\eta + 55^\circ + 15^\circ = 180^\circ, \text{ also}$$
$$\underline{\underline{\eta = 110^\circ}} \text{ und damit nach dem}$$

Satz über Nebenwinkel

$$\underline{\underline{\varepsilon = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ}}$$

Damit sind die Winkelgrößen α, β, γ, ε, η und φ ermittelt.

<u>150733) Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

Behauptung: Es gibt keine 5 Geraden und 3 Punkte, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Beweis: Angenommen, es gäbe 5 derartige Geraden p, q, r, s, t und 3 derartige Punkte A, B, C. Dann lassen sich 2 Fälle unterscheiden:

a) Die Punkte A, B, C liegen auf einer und derselben Geraden (etwa p).

b) Die Punkte A, B, C liegen nicht auf einer und derselben Geraden.

Im Falle a) geht laut Aufgabe noch (mindestens) je eine weitere der genannten Geraden durch A bzw. B bzw. C. Da kein weiterer Schnittpunkt auftreten soll, müssen diese 3 Geraden (etwa q, r, s) zueinander parallel sein (Abb. L 733a). Jede weitere (fünfte) Gerade durch einen der Punkte A, B, C ist nun zu q, r und s nicht parallel und erzeugt daher (mindestens) einen weiteren (vierten) Schnittpunkt, entgegen der Annahme.

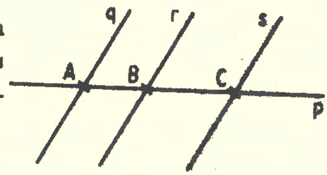


Abb. L 733 a

Im Falle b) können entweder die A, B, C enthaltenden Geraden (etwa p, q, r) jede genau einen dieser Punkte enthalten und zueinander parallel sein, dann liefert bereits jede vierte Gerade, die durch einen der Punkte A, B, C verläuft, (mindestens) einen weiteren Schnittpunkt, da sie zu p, q, r nicht parallel ist, oder (mindestens) eine der Geraden (etwa p) enthält zwei der Punkte A, B, C (etwa A, B). Dann kann von den (mindestens) zwei Geraden, die sich im dritten der Punkte (C) schneiden, nur die eine (q) außer durch C auch noch durch einen der Punkte A, B (etwa A) verlaufen und die andere (r) entweder zu p parallel sein oder durch C und B verlaufen, da anderenfalls ein weiterer Schnittpunkt entstünde. Das heißt, es lassen sich durch C höchstens drei Geraden (q, r, s) unter den Bedingungen der Aufgabe legen, wenn p durch A und B verläuft. Jede weitere Gerade (t) durch einen der Punkte A, B ist stets zu (mindestens) drei der Geraden p, q, r, s nicht parallel und liefert daher (mindestens) einen weiteren Schnittpunkt, entgegen der Annahme (Abb. L 733b). Damit ist die Behauptung bewiesen.

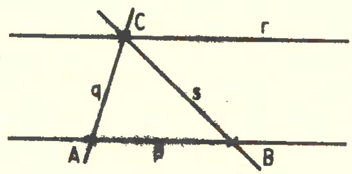


Abb. L 733 b

XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

150734) Lösung: 7 Punkte

Ist v die auf der Strecke übliche Durchschnittsgeschwindigkeit, so fährt der Zug mit der Geschwindigkeit $\frac{120}{100}v = \frac{6}{5}v$.

Ist s die Länge der Strecke von B bis zu der Stelle, an der der Rückstand aufgeholt ist, und ist t die Fahrzeit des Zuges von B bis zu dieser Stelle, so ist einerseits

$$s = \frac{6}{5} v \cdot t,$$

andererseits die für die genannte Strecke übliche Fahrzeit (in Minuten) t + 15, also $s = v \cdot (t + 15)$.

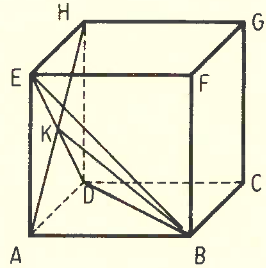
Daraus folgt $\frac{6}{5} vt = vt + 15v$, also $\frac{1}{5} vt = 15 v$, also $t = 5 \cdot 15 = 75$.

Der Rückstand ist mithin in 75 min aufgeholt.

150735) Lösung: 6 Punkte

Das Dreieck EBD ist gleichseitig; denn seine Seiten sind Diagonalen kongruenter Quadrate. Da in jedem Quadrat die Diagonalen einander halbieren, ist K Mittelpunkt der Seite ED und folglich BK Seitenhalbierende im Dreieck EBD. Im gleichseitigen Dreieck fallen Höhe und Seitenhalbierende, die von ein und derselben Ecke ausgehen, zusammen. Somit gilt tatsächlich

$$DE \perp BK, \quad \text{w.z.b.w.}$$



(Abb. L 735)

150736) Lösung: **7 Punkte**

Wegen $z > 0$ gilt auch $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.
Wenn eine Zahl durch 9 teilbar ist, so ist ihre Quersumme durch 9 teilbar. Daher sind alle Zahlen a, b und c dieser Aufgabe durch 9 teilbar.
Da jede der 1 000 000 000 Ziffern von z höchstens 9 beträgt, ist

$$a \leqq 9 \cdot 1\,000\,000\,000 = 9\,000\,000\,000,$$

also ist a höchstens zehnstellig.

Deshalb ist $b < 9 \cdot 10 = 90$, also ist b eine der Zahlen 81, 72 63, 54, 45, 36, 27, 18, 9.

Die Quersumme jeder dieser 9 Zahlen ist 9.
Daher gilt $c = 9$ für alle zu betrachtenden Zahlen z.