# XV. Olympiade Junger Mathematiker
# der Deutschen Demokratischen Republik
## 2. Stufe (Kreisolympiade)
## Olympiadeklasse 7

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

### 150721

a) Ein Stück Land habe die Form eines Rechtecks, dessen eine Seitenlänge die andere um 75 m übertrifft und dessen Umfang insgesamt 650 m beträgt. Ermittle die Seitenlängen und den Flächeninhalt (in Hektar) dieses Landstücks!

b) Auf der ganzen Fläche des genannten Landstücks sollen Obstbäume derart gepflanzt werden, daß die Bäume in jeweils zu den Rechteckseiten parallelen Reihen stehen, also nicht etwa "auf Lücke" gesetzt sind, und der Abstand von Baum zu nächststehendem Baum und der von einer Randseite zum nächststehenden Baum jeweils 5 m beträgt.
Ermittle die genaue Anzahl von Bäumen, die unter den angegebenen Bedingungen gepflanzt werden können!

### 150722

Das Ehepaar Winkler hat genau drei Kinder. Am 1. Januar 1975 war das älteste Kind doppelt so alt wie das zweite und dieses wiederum doppelt so alt wie das jüngste Kind. Die Mutter war doppelt so alt wie ihre drei Kinder zusammen. Der Vater war so alt wie die Mutter und das jüngste Kind zusammen. Alle fünf Familienmitglieder waren zusammen so alt wie der eine Großvater, und dieser war 64 Jahre alt, als das älteste Kind geboren wurde.

Wie alt war jede der genannten Personen am 1. Januar 1975?
(Alle Altersangaben sind in vollen Lebensjahren zu verstehen)

**150723**

In einem spitzwinkligen Dreieck ABC sei CD die Höhe auf AB und CE die Winkelhalbierende von $\sphericalangle$ ACB.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets

$\overline{\sphericalangle DCE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\sphericalangle ABC} - \overline{\sphericalangle CAB}$ gilt!

**150724**

Konstruiere ein Dreieck ABC aus

$b = 6$ cm, $h_b = 5$ cm, $c = 7$ cm!

Dabei sei b die Länge der Seite AC, c die der Seite AB und $h_b$ die der auf der Geraden durch A und C senkrechten Höhe.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist.

# XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

## 2. Stufe (Kreisolympiade)

## Lösungen und Punktbewertung

### Olympiadeklasse 7

**Achtung:** Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

150721) Lösung: 8 Punkte

a) Wenn die Angaben für ein Rechteck zutreffen, dann ergibt sich der Umfang als Summe aus dem Vierfachen der kleineren Seitenlänge und dem Doppelten von 75 m. Das Vierfache der kleineren Seitenlänge beträgt somit 650 m - 150 m = 500 m, die kleinere Seitenlänge also 125 m, die größere 200 m. Der Flächeninhalt eines derartigen Rechtecks beträgt $125 \cdot 200\ m^2 = 25\,000\ m^2 = 2{,}5$ ha.

b) Parallel zur größeren Rechteckseite können nach den Bedingungen der Aufgabe $\frac{125}{5} - 1 = 24$ und parallel zur kleineren $\frac{200}{5} - 1 = 39$ Bäume gepflanzt werden. Die gesuchte Anzahl der Bäume beträgt somit $24 \cdot 39 = 936$.

150722) Lösung: 10 Punkte

Ist am 1. Januar 1975 das jüngste Kind x Jahre alt, so ist das zweite 2 x Jahre, das älteste 4 x Jahre, die Mutter 14 x Jahre, der Vater 15 x Jahre und der Großvater (64 + 4 x) Jahre alt. Es gilt nun laut Aufgabe

$$+ 2x + 4x + 14x + 15x = 4x + 64,$$

daraus folgt $32x = 64$, also $x = 2$.

Das jüngste Kind war am 1. Januar 1975 somit 2 Jahre alt, das zweite 4 Jahre, das älteste 8 Jahre, die Mutter 28 Jahre, der Vater 30 Jahre und der Großvater 72 Jahre alt.

150723) Lösung: 10 Punkte

Die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC bei A, B, C seien $\alpha, \beta, \gamma$. Da $\triangle$ ABC bei A spitzwinklig ist, bilden A, D, C ein bei D rechtwinkliges Dreieck mit $\alpha$ als Größe des Innenwinkels bei A.

Daher gilt $\overline{\sphericalangle ACD} = 90^\circ - \alpha$.

Da D und E auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegen, gilt folglich

$\overline{\sphericalangle DCE} = \left| \overline{\sphericalangle ACD} - \overline{\sphericalangle ACE} \right| = \left| 90^\circ - \alpha - \frac{\gamma}{2} \right|$,

wegen $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ$ also

$\overline{\sphericalangle DCE} = \frac{1}{2} \left| \beta - \alpha \right|$, w.z.b.w.

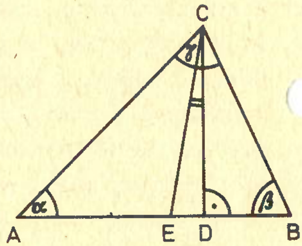


Abb. L 723

Bemerkung: Wie vorstehende Lösung zeigt, braucht man nur die Voraussetzung, daß $\sphericalangle$CAB spitz ist. Da sich dies eventuell durch Vertauschung der Bezeichnung von A mit B (die an Voraussetzungen und Behauptung sonst nichts ändert) stets erreichen läßt, gilt der Satz sogar für beliebige Dreiecke.

150724) Lösung: 12 Punkte

(I) Angenommen, $\triangle$ABC sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht (Abb. L 724 a).

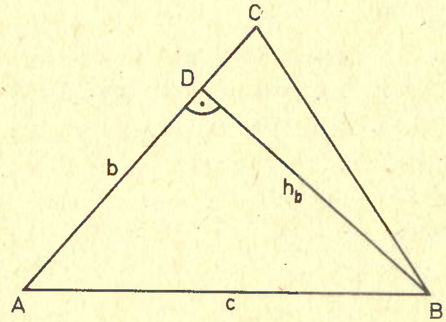


Abb. L 724 a

Der Fußpunkt des von B auf die Gerade durch A und C gefällten Lotes sei D. Dann gilt $\overline{BA} = c$, $h_b = \overline{BD}$, und es ist $A \neq D$, wegen $c \neq h_b$ ist folglich ABD ein Dreieck. In ihm sind $c$, $h_b$ Seitenlängen, und es enthält den rechten Winkel $\sphericalangle BDA$. Punkt C liegt erstens auf der Geraden durch A und D und zweitens auf dem Kreis um A mit b.

Daraus folgt, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(II) (1) Wir konstruieren das Teildreieck ABD aus $\overline{AB} = c$ $\overline{BD} = h_b$ und dem rechten Winkel $\sphericalangle BDA$.

(2) Wir zeichnen die Gerade durch D und A.

(3) Wir zeichnen den Kreis um A mit b.
Schneidet er die Gerade durch D und A, so sei C einer der Schnittpunkte.

(III) Jedes so erhaltene Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion ist $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{BD} = h_b$ und BD die auf der Geraden durch A und C senkrechte Höhe.

(IV) Wegen $h_b < c$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach (ssw) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, da der gegebene rechte Winkel der größeren Seite gegenüberliegt.

Konstruktionsschritt (2) ist stets eindeutig ausführbar, da sich wegen $h_b < c$ bei (1) $D \neq A$ ergeben hatte.

Schließlich ergibt (3) stets zwei verschiedene Punkte $C_1$ und $C_2$. Da nun der wegen $h_b < c$ spitze Winkel $\sphericalangle DAB$ in dem einen der beiden Dreiecke $ABC_1$, $ABC_2$ als Innenwinkel in dem anderen als Außenwinkel bei A auftritt, so ist das eine dieser Dreiecke bei A spitzwinklig, das andere bei A stumpfwinklig; folglich sind diese beiden Dreiecke nicht kongruent. Durch die gegebenen Stücke ist ein Dreieck mithin nicht, auch nicht bis auf Kongruenz, eindeutig bestimmt.

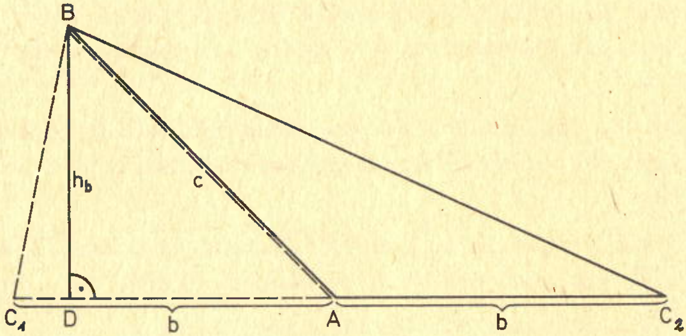


Abb. L 724 b