A 11/12; I XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1241) Man beweise, daß für alle reellen Zahlen a, b, c, d mit $0 < a \leqq b \leqq c \leqq d$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geqq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} \qquad (1)$$

ist. Man gebe notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

1242) Von einem Dreieck seien die Innenwinkel gemessen worden. Die Summe der dabei (als Näherungswerte der wahren Innenwinkelgrößen) erhaltenen Meßwerte u, v, w sei $180^\circ + \delta$ mit $\delta \neq 0^\circ$. Durch drei Korrekturwerte x, y, z sollen die Meßwerte so verändert werden, daß die Summe der dann entstehenden Werte $u + x$, $v + y$, $w + z$ gleich 180° ist. Es ist zu beweisen, daß für alle unter diesen Bedingungen möglichen Korrekturwerte x, y, z der Wert $S = x^2 + y^2 + z^2$ genau dann am kleinsten ist, wenn $x = y = z = -\frac{\delta}{3}$ gilt.

1243) In einem Mathematikzirkel, in dem Eigenschaften von Funktionen f bei Kehrwertbildung untersucht werden, vermutet ein Zirkelteilnehmer, allgemein gelte für Funktionen f, die in einem Intervall J definiert sind und nur positive Funktionswerte haben, der folgende Satz:

(A) Ist f in J streng konkav, so ist $\frac{1}{f}$ in J streng konvex.

Ein anderer Zirkelteilnehmer meint, es gelte auch der folgende Satz:

(B) Ist f in J streng konvex, so ist $\frac{1}{f}$ in J streng konkav.

30 05 74-1/1000/75(588)

A 11/12; I

Man untersuche jeden dieser Sätze auf seine Richtigkeit.

Hinweise:

1) Genau dann heißt f(x) in J streng $\begin{Bmatrix}\text{konvex}\\ \text{konkav}\end{Bmatrix}$, wenn für je drei Zahlen x_1, x^*, x_2 aus J mit $x_1 < x^* < x_2$ der auf der von den Punkten $(x_1; f(x_1))$ $(x_2; f(x_2))$ begrenzten Sehne gelegene Punkt, dessen Abszisse x^* ist, eine Ordinate hat, die $\begin{Bmatrix}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{Bmatrix}$ als $f(x^*)$ ist.

2) Mit $\frac{1}{f}$ ist die durch die Festsetzung $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ für alle Zahlen x des Intervalls J definierte Funktion g bezeichnet.

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklassen 11/12 – 2. Tag –

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen; dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1244) Man ermittle alle Paare $(x;y)$ reeller Zahlen x und y, für die die Gleichungen

$$24x^2 - 25xy - 73x + 25y - 35 = 0 \qquad (1) \text{ und}$$
$$x^2 - y^2 - 2x - 2y - 7 = 0 \qquad (2) \text{ gelten.}$$

1245) Ist P ein Punkt im Innern eines regelmäßigen Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$, so seien die Abstände, die P von den vier Seitenflächen des Tetraeders hat, mit x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnet. Mit h sei der Abstand bezeichnet, den A_4 von der Fläche des Dreiecks $A_1A_2A_3$ hat.

a) Man beweise, daß es genau einen Punkt P^+ im Innern von $A_1A_2A_3A_4$ gibt, für den alle vier Abstände x_1, x_2, x_3, x_4 den Wert $\frac{h}{4}$ haben.

b) Man beweise, daß für alle Punkte P im Innern des Tetraeders das Produkt $x_1x_2x_3x_4$ genau dann seinen größten Wert annimmt, wenn P mit dem in a) genannten Punkt P^+ zusammenfällt.

30 05 74-1 /1000/75(588)

Von den nachstehenden Aufgaben 1246A und 1246B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

1246A) Es sei n eine natürliche Zahl mit $n \geqq 2$. Jemand schreibt n Briefe, von denen jeder für genau einen unter n verschiedenen Adressaten vorgesehen ist, und steckt in jeden von n Umschlägen genau einen dieser Briefe, ohne vorher die Adressen auf die Umschläge zu schreiben. Da er nun nicht mehr weiß, in welchem Umschlag sich welcher Brief befindet, schreibt er willkürlich die n Adressen auf die n Umschläge (auf jeden Umschlag genau eine Adresse).

Man beweise: Die Wahrscheinlichkeit q_n dafür, daß bei keinem der Adressaten der an ihn gerichtete Umschlag den für ihn vorgesehenen Brief enthält, hat den Wert

$$q_n = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2!} + (-1)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}.$$

<u>Hinweis</u>: Man bezeichne jede überhaupt mögliche Verteilung der Briefe an die Adressaten (jeder Brief an genau einen der Adressaten) als einen "möglichen Fall". Unter diesen bezeichne man jede Verteilung, bei der für keinen Adressaten der an ihn gerichtete Umschlag den für ihn vorgesehenen Brief enthält, als einen "günstigen Fall". Die Anzahl aller "möglichen Fälle" sei a_n genannt, die Anzahl aller "günstigen Fälle" g_n. Dann ist die genannte Wahrscheinlichkeit q_n definiert als

$$q_n = \frac{g_n}{a_n}.$$

1246B) In der Ebene sei der "Abstand" zwischen zwei Punkten wie folgt definiert:
Sind P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte, die in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Koordinaten $(x_1;y_1)$ bzw. $(x_2;y_2)$ haben (x_1, x_2, y_1, y_2 seien reelle Zahlen), so sei ihr "Abstand" $d(P_1;P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$.

Man ermittle die Menge M aller Punkte der Ebene, die bezüglich des so definierten Abstandes von den Punkten A (0;2) und B (1;4) gleichweit entfernt sind.

L 11/12; I XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

1241) Lösung: 5 Punkte

a) Wegen $0 < a \leqq b \leqq c \leqq d$ gilt

$c - a \geqq 0,$ (2)

$d - b \geqq 0,$ (3)

$bd - ac \geqq 0.$ (4)

Daraus folgt

$(c - a)(d - b)\cdot(bd - ac) \geqq 0$ bzw.

$ac(d - b)(a - c) + bd(d - b)(c - a) \geqq 0$ bzw.

$a^2c(d - b) + b^2d(a - c) + c^2a(b - d) + d^2b(c - a) \geqq 0$ bzw.

$a^2cd + b^2ad + c^2ab + d^2bc \geqq a^2bc + b^2cd + c^2ad + d^2ab,$

woraus man nach Division durch $abcd \neq 0$ die Ungleichung (1) erhält.

b) Das Gleichheitszeichen gilt in (1) genau dann, wenn

$a - c = 0$, d. h. $a = c$

oder

$d - b = 0$, d. h. $d = b$

oder

$bd - ac = 0$, d. h. $ac = bd$ ist.

Wegen $a \leqq b \leqq c$ ist $a = c$ gleichbedeutend mit $a = b = c$.
Wegen $b \leqq c \leqq d$ ist $b = d$ gleichbedeutend mit $b = c = d$.

Aus $ac = bd$ folgt $a = b$; denn wäre $a < b$, so wäre wegen $c \leqq d$ auch $ac < bd$. Ebenso folgt aus $ac = bd$, daß $c = d$ gelten muß. Also ist $ac = bd$ gleichbedeutend mit $a = b$ und $c = d$.

Damit ist gezeigt: Notwendig und hinreichend dafür, daß in (1) das Gleichheitszeichen gilt, ist die Bedingung, daß in mindestens zwei der drei Ungleichungen $a \leqq b \leqq c \leqq d$ das Gleichheitszeichen gilt.

30 05 74-1/1ooo/75/(588)

Andere Lösungsmöglichkeit:

Es liegt nahe, folgende Substitutionen vorzunehmen:

$\frac{a}{b} = u$, $\frac{b}{c} = v$, $\frac{c}{d} = w$.

Dann gilt

(2) $0 < u \leqq 1$, $0 < v \leqq 1$, $0 < w \leqq 1$.

sowie $\frac{a}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = u \cdot v \cdot w$,

und die zu beweisende Aussage ist äquivalent damit, daß unter der Bedingung (2)

$u + v + w + \frac{1}{uvw} \geqq \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} + uvw$ gilt, also daß

$(uvw)^2 - uvw(u+v+w) + vw + wu + uv - 1 \leqq 0$ und weiter, daß

(3) $(vw - 1)(wu - 1)(uv - 1) \leqq 0$

gilt, was offensichtlich richtig ist. Das Gleichheitszeichen steht dabei in (1) genau dann, wenn es in (3) steht, also wenn einer der folgenden drei Fälle vorliegt:

1) $v = w = 1$, d.h. $b = c = d$
2) $w = u = 1$, d.h. $a = b$ und $c = d$
3) $u = v = 1$, d.h. $a = b = c$,

oder, anders ausgedrückt, wenn unter den Zahlen a, b, c, d höchstens zwei verschiedene vorkommen.

1242) Lösung: 7 Punkte

Wegen $x + y + z = -\delta$ muß $z = -(x + y + \delta)$ gelten.

Damit erhält man für S:

$S = 2(x^2 + y^2 + \delta x + \delta y + xy) + \delta^2$.

Für die Werte $h = x + \frac{\delta}{3}$, $k = y + \frac{\delta}{3}$ gilt $x = -\frac{\delta}{3} + h$, $y = -\frac{\delta}{3} + k$, und aus

(1) folgt $S = \frac{\delta^2}{3} + 2(h^2 + hk + k^2) = \frac{\delta^2}{3} + 2\left((h + \frac{k}{2})^2 + \frac{3}{2}k^2\right)$. (2)

Aus (2) folgt $S \geqq \frac{\delta^2}{3}$, wobei die Gleichheit genau dann eintritt, wenn $h + \frac{k}{2} = \frac{3}{4}k = 0$ gilt, d.h. genau für $h = k = 0$.

Daher ist $S = x^2 + y^2 + z^2$ genau dann am kleinsten, wenn $x = y = z = -\frac{s}{3}$ gilt, w.z.b.w..

1243) **Lösung:** **8 Punkte**

(A) ist richtig. **Beweis:**

Sei f in J konkav; seien x_1, x^*, x_2 in J; gelte $x_1 < x^* < x_2$. Wir setzen $y_1 = f(x_1)$, $y^* = f(x^*)$, $y_2 = f(x_2)$ und bezeichnen mit p bzw. q die Ordinate des auf der Sehne mit den Endpunkten $(x_1;y_1)$ $(x_2;y_2)$ bzw. auf der mit den Endpunkten $(x_1;\frac{1}{y_1})$ $(x_2;\frac{1}{y_2})$ gelegenen Punktes, dessen Abszisse x^* ist.

Ferner setzen wir $d_1 = x^* - x_1$, $d_2 = x_2 - x^*$. Dann gilt

$$(1)\quad p - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x^* - x_1) \text{ und } (2)\quad q - \frac{1}{y_1} = \frac{\frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_1}}{x_2 - x_1}(x^* - x_1).$$

Aus (1) folgt

$$p = \frac{y_2 - y_1}{d_1 + d_2}d_1 + y_1 = \frac{d_1y_2 + d_2y_1}{d_1 + d_2}.$$

aus (2) ebenso

$$q = \frac{d_1\frac{1}{y_2} + d_2\frac{1}{y_1}}{d_1 + d_2} = \frac{d_1y_1 + d_2y_2}{(d_1+d_2)y_1y_2}.$$

Nach Voraussetzung gilt

(3) $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, also

(4) $p > 0$ sowie (5) $p < y^*$.

Ferner gilt $d_1d_2(y_1 - y_2)^2 \geq 0$, also

$$d_1^2y_1y_2 + d_1d_2y_1^2 + d_1d_2y_2^2 + d_2^2y_1y_2 \geq d_1^2y_1y_2 + 2d_1d_2y_1y_2 + d_2^2y_1y_2,$$

$(d_1y_2 + d_2y_1)(d_1y_1 + d_2y_2) \geq (d_1 + d_2)^2y_1y_2$, also wegen (3),

(4) sowie (5)

$$q = \frac{d_1y_1 + d_2y_2}{(d_1+d_2)y_1y_2} \geq \frac{d_1 + d_2}{d_1y_2 + d_2y_1} = \frac{1}{p} > \frac{1}{y^*} \text{, w.z.b.w..}$$

(B) ist falsch, d.h., es gibt eine in einem Intervall J definierte Funktion f, die nur positive Funktionswerte hat, für die f in J konvex, aber $\frac{1}{f}$ nicht in J konkav ist.

Zum Beweis genügt die Angabe eines Beispiels, etwa die durch $f(x) = \frac{1}{x}$ in $J = (0, +\infty)$ definierte Funktion f:

a) Für alle $x > 0$ ist $f(x) = \frac{1}{x} > 0$.

b) In J ist die durch $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ gegebene Funktion g nicht konkav, d.h., es gibt drei Zahlen x_1, x^*, x_2 mit $0 < x_1 < x^* < x_2$ so, daß der auf $(x_1;x_1)(x_2;x_2)$ gelegene Punkt, dessen Abszisse x^* ist, eine Ordinate hat, die nicht kleiner als x^* ist. In der Tat hat sogar für je drei Zahlen x_1, x^*, x_2 mit $0 < x_1 < x^* < x_2$ die Gerade durch $(x_1;x_1)$ $(x_2;x_2)$ die Gleichung $y = x$; also hat der auf ihr gelegene Punkt, dessen Abszisse x^* ist, auch x^* als Ordinate.

c) Für je drei Zahlen x_1, x^*, x_2 mit $0 < x_1 < x^* < x_2$ gilt
$(x^* - x_1)(x_2 - x^*) > 0$, also
$-(x^*)^2 + x_1x^* + x_2x^* > x_1x_2$.
Daher ist für den auf $(x_1; \frac{1}{x_1})$ $(x_1; \frac{1}{x_2})$ gelegenen Punkt mit der Abszisse x^* die Ordinate

$$\frac{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}}{x_2 - x_1}(x^* - x_1) + \frac{1}{x_1} = \frac{-x^* + x_1 + x_2}{x_1x_2} > \frac{1}{x^*};$$

folglich ist $f(x) = \frac{1}{x}$ in J konvex.

<u>Anmerkung:</u> Andere Beispiele für b) sind etwa
$f(x) = e^x$ bzw. $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

1244) **Lösung:** **6 Punkte**

I.

Angenommen, für ein Paar $(x;y)$ gelten (1) und (2). Dann folgt

$$24(x-1)^2-25(x-1)(y+1) = 24x^2-48x+24-25xy-25x+25y+25$$
$$= 35 \quad +24 \quad +25$$
$$= 84$$

und

$$(x-1)^2 - (y+1)^2 = x^2 - 2x + 1 - y^2 - 2y - 1$$
$$= 7,$$

d.h. für das Paar $(u;v) = (x-1;\ y+1)$ gelten die Gleichungen

$$24u^2 - 25uv - 84 = 0 \qquad (3)$$
$$u^2 - v^2 - 7 = 0. \qquad (4)$$

Aus (3) folgt $625u^2v^2 = (24u^2-84)^2 = 576u^4-4032u^2+7056$, (5)

aus (4) folgt $625u^4 - 625u^2v^2 - 4375u^2 = 0$.

Setzt man (5) in (6) ein, so ergibt sich

$625u^4 - 576u^4 + 4032u^2 - 7056 - 4375u^2 = 0$, also

$$49u^4 - 343u^2 - 7056 = 0,$$
$$u^4 - 7u^2 - 144 = 0,$$

$$u^2 = \frac{7}{2} + \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{576}{4}} \quad \text{oder} \quad u^2 = \frac{7}{2} - \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{576}{4}}$$

Da die letzte Gleichung auf den Widerspruch $u^2 < 0$ führen würde, verbleibt nur $u^2 = 16$, also $u = 4$ oder $u = -4$.

Aus $u = 4$ und (3) folgt $384 - 100v - 84 = 0$, also $v = 3$;
aus $u = -4$ und (3) folgt $384 + 100v - 84 = 0$, also $v = -3$.
Aus $u = 4$ und $v = 3$ folgt $x = u+1 = 5$ und $y = v-1 = 2$;
aus $u = -4$ und $v = -3$ folgt $x = u+1 = -3$ und $y = v-1 = -4$.
Daher können nur die Paare $(5;2)$ und $(-3;-4)$ die Gleichungen (1) und (2) erfüllen.

30 05 74-1/1000/75 (588)

II.

Umgekehrt gilt in der Tat

$24 \cdot 25 - 25 \cdot 5 \cdot 2 - 73 \cdot 5 + 25 \cdot 2 - 35 = 0$

$25 - 4 - 2 \cdot 5 - 2 \cdot 2 - 7 = 0,$

also erfüllt (5; 2) die Gleichungen (1) und (2); und es gilt

$24 \cdot 9 - 25 \cdot 3 \cdot 4 + 73 \cdot 3 - 25 \cdot 4 - 35 = 0,$

$9 - 16 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 - 7 = 0,$

also erfüllt auch (-3; -4) die Gleichungen (1) und (2). Daher sind genau die Paare (5; 2) und (-3; -4) die gesuchten.

1245) Lösung: **7 Punkte**

a) Die mittelsenkrechten Ebenen ε_2 zu A_1A_2 und ε_3 zu A_2A_3 sind nicht zueinander parallel. Daher haben sie eine Schnittgerade g. Sie ist die Menge aller Punkte, die von A_1, A_2 und A_3 den gleichen Abstand haben und nicht parallel zur mittelsenkrechten Ebene ε_1 zu A_1A_4, hat also mit dieser einen Schnittpunkt P^+. Dieser hat somit von A_1, A_2, A_3 und A_4 gleiche Abstände, d.h., es gilt $\overline{A_1P^+} = \overline{A_2P^+} = \overline{A_3P^+} = \overline{A_4P^+}$. Andererseits gilt wegen der Regelmäßigkeit des gegebenen Tetraeders

$\triangle A_2A_3A_4 \cong \triangle A_1A_3A_4 \cong \triangle A_1A_2A_4 \cong \triangle A_1A_2A_3.$

Mithin sind die vier Tetraeder

(+) $A_2A_3A_4P^+$, $A_1A_3A_4P^+$, $A_1A_2A_4P^+$, $A_1A_2A_3P^+$

untereinander kongruent, da sie in den Längen aller entsprechenden Seitenkanten übereinstimmen (was ausreichend ist, da sämtliche Seitenflächen Dreiecke sind). Sie können so miteinander zur Deckung gebracht werden, daß der Punkt P^+ festgehalten wird und die Dreiecke $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$ und $A_1A_2A_3$ aufeinanderfallen. Also hat P^+ von diesen vier Dreiecken und damit von den vier Seitenflächen des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ gleiche Abstände $x^+ = x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Bezeichnet F den Flächeninhalt einer Seitenfläche und V das Volumen des Tetraeders sowie V^+ das Volumen eines der Tetraeder (+), so gilt

$\frac{1}{3} Fh = V = 4V^+ = \frac{4}{3} Fx^+$. Daraus folgt $x^+ = \frac{h}{4}$.

Daß es keinen weiteren Punkt mit dieser Eigenschaft geben kann, folgt so:

Hat ein Punkt $\overline{P}$ diese Abstände zu den vier Seitenflächen des Tetraeders, so liegt er in den zu $A_2A_3A_4$ bzw. $A_1A_3A_4$ bzw. zu $A_1A_2A_4$ parallelen Ebenen durch den oben erwähnten Punkt P^+. Da aber die ersten beiden dieser drei Ebenen nicht parallel zueinander sind, und da ihre Schnittgerade nicht zur dritten Ebene parallel ist, haben diese Ebenen genau einen gemeinsamen Punkt. Also muß $\overline{P} = P^+$ sein.

b) Bezeichnet man für irgendeinen Punkt P im Innern des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ die Volumina der Tetraeder $A_2A_3A_4P$, $A_1A_3A_4P$, $A_1A_2A_4P$, $A_1A_2A_3P$ mit V_1, V_2, V_3, V_4, so gilt

$\frac{1}{3} Fh = V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{3} Fx_1 + \frac{1}{3} Fx_2 + \frac{1}{3} Fx_3 + \frac{1}{3} Fx_4$.

Daraus folgt $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = h$. (1)

Nun gilt $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$, also

$x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1x_2}$, (2)

und darin gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $x_1 = x_2$ ist. Ebenso gilt

$x_3 + x_4 \geq 2\sqrt{x_3x_4}$ (3)

und darin gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $x_3 = x_4$ ist. Ebenso gilt

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 2\sqrt{(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)}$, (4)

und darin gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ ist. Aus (4), (2), (3) folgt

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}$ oder, nach (1) gleichwertig hiermit $x_1x_2x_3x_4 \leq (\frac{h}{4})^4$, und darin gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn es sowohl in (4) als auch in (2) und (3) gilt, d.h. aber wegen (1) genau dann, wenn $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{h}{4}$ ist, d.h., wenn P mit P^+ zusammenfällt.

1246A) <u>Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Die Anzahl a_n aller Möglichkeiten, n Briefe an n Adressaten zu verteilen, ist n!. Durch vollständige Induktion beweisen wir: Die Anzahl g_n aller "günstigen Fälle" ist

$$g_n = (-1)^2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n + (-1)^3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot n + (-1)^n \qquad (1)$$

I. Für n = 2 ist unter allen Möglichkeiten genau eine "günstig", also ist $g_2 = 1 = (-1)^2$.
Für n = 3 sind unter allen Möglichkeiten
$(1\to 1,\ 2\to 2,\ 3\to 3)$, $(1\to 1,\ 2\to 3,\ 3\to 2)$,
$(1\to 2,\ 2\to 1\ \ 3\to 3)$, $(1\to 2,\ 2\to 3,\ 3\to 1)$,
$(1\to 3,\ 2\to 1,\ 3\to 2)$, $(1\to 3,\ 2\to 2,\ 3\to 1)$
genau zwei (die vierte und die fünfte) "günstig", also ist $g_3 = 2 = (-1)^2\cdot 3 + (-1)^3$.

II. Für ein $n \geqq 4$ sei die Richtigkeit von (1) für alle v mit $2 \leqq v < n$ statt n vorausgesetzt, dann folgt:

Dafür, daß Brief 1 nicht an Adressat 1 gelangt, gibt es genau n-1 Möglichkeiten. In jeder von ihnen läßt sich die Numerierung der Paare aus Adressat und zugehörigem Brief so wählen, daß Brief 1 an Adressat 2 gelangt. Nun gibt es genau folgende Möglichkeiten:

(a) Brief 2 gelangt an Adressat 1, und die Briefe 3, 4, ..., n werden so an die Adressaten 3, 4, ..., n verteilt, daß kein Brief an den gleichnumerierten Adressaten gelangt. Hierfür gibt es genau g_{n-2} Möglichkeiten.

(b) Brief 2 gelangt an einen der Adressaten 3,4,...,n, der etwa mit k bezeichnet sei, und die Briefe 3,4, ..., n werden so an die von k verschiedenen unter den Adressaten 1,3,4, ..., n verteilt, daß kein Brief an den gleichnumerierten Adressaten gelangt.
Das ist gleichbedeutend mit der folgenden Forderung: Man stelle eine neue Zuordnung zwischen den Briefen 2, 3, 4, ..., n und den Adressaten 1, 3, 4, ..., n her, nämlich

$2 \leftrightarrow 1$, $3 \leftrightarrow 3$, $4 \leftrightarrow 4$, ..., $n \leftrightarrow n$, und fordere nun eine Zustellung der Briefe 2, 3, 4, ..., n an je genau einen der Adressaten 1, 3, 4, ..., n, bei der kein Brief an den ihm gemäß der neuen Zuordnung zugehörigen Adressaten gelangt. Hierfür gibt es genau g_{n-1} Möglichkeiten.

Damit ergibt sich $g_n = (n-1)(g_{n-2} + g_{n-1})$, nach Induktionsannahme also

$$g_n = (n-1)\Big((-1)^2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-2) + \ldots + (-1)^{n-3}\cdot(n-2) + (n-1)^{n-2}$$
$$+ (-1)^2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-2)(n-1) + \ldots + (-1)^{n-3}\cdot(n-2)(n-1)$$
$$+ (n-1)^{n-2}\cdot(n-1) + (-1)^{n-1}\Big)$$

$$= (n-1)\Big((-1)^2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot n + \ldots + (-1)^{n-3}\cdot(n-2)n$$
$$+ (-1)^{n-2}\cdot n \qquad + (-1)^{n-1}\Big)$$

$$= (-1)^2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-2)(n-1)n + \ldots + (-1)^{n-3}\cdot(n-2)(n-1)n$$
$$+ (-1)^{n-2}\cdot(n-1)n + (-1)^{n-1}\cdot n + (-1)^n,$$

also die Richtigkeit von (1) für n.

Damit ist (1) durch vollständige Induktion bewiesen, und es ergibt sich

$$q_n = \frac{g_n}{n!} = (-1)^2\cdot\frac{1}{2!} + (-1)^3\cdot\frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(n-1)!} + (-1)^n\,\frac{1}{n!},$$

w.z.b.w..

1246B) <u>Lösung</u>: 7 Punkte

Ein Punkt $Z(x;y)$ gehört genau dann der Menge M an, wenn für ihn $d(Z;A) = d(Z;B)$ oder, gleichwertig hiermit

$\max\{|x|, |y-2|\} = \max.\{|x-1|, |y-4|\}$ (1) gilt.

<u>Fallunterscheidung</u>:

(a) Es sei $|x| \geqq |y-2|$, $|x-1| \geqq |y-4|$.
Aus (1) folgt dann $|x| = |x-1|$, d.h. $x = \frac{1}{2}$.
Mithin erhält man das Ungleichungssystem $|y-2| \leqq \frac{1}{2}$,

$|y-4| \leqq \frac{1}{2}$, , also $1,5 \leqq y \leqq 2,5$; $3,5 \leqq y \leqq 4,5$.

Diese Ungleichungen widersprechen aber einander.

(b) Es sei $|x| \geqq |y-2|$, $|x-1| < |y-4|$.

Dann ist (1) gleichbedeutend mit $|x| = |y-4|$, also mit $y = x+4$ oder $y = -x + 4$. Für $y = x + 4$ ergibt sich das Ungleichungssystem $|x| \geqq |x + 2|$, $|x - 1| < |x|$, also $x \leqq -1$, $x > 0,5$.

Diese beiden Ungleichungen widersprechen einander.

Für $y = -x + 4$ sind die Bedingungen des Falles (b) gleichbedeutend mit dem Ungleichungssystem

$|x| \geqq |-x + 2|$, $|x-1| < |x|$, also mit $x \geqq 1$, $x > 0,5$ und folglich mit $x \geqq 1$. Zur Menge M gehören daher unter den Bedingungen des Falles (b) genau diejenigen Punkte, die auf dem Teil der Geraden $y = -x + 4$ liegen, für den $x \geqq 1$ gilt.

(c) Es sei $|x| < |y - 2|$, $|x - 1| \geqq |y - 4|$.

Dann ist (1) gleichbedeutend mit $|x-1| = |y-2|$, also $y = x + 1$ oder $y = -x + 3$.

Für $y = x + 1$ ergibt sich das Ungleichungssystem

$|x| < |x - 1|$, $|x - 1| \geqq |x - 3|$, also $x < 0,5$; $x \geqq 2$.

Diese beiden Ungleichungen widersprechen einander.

Für $y = -x + 3$ sind die Bedingungen des Falles (c) gleichbedeutend mit dem Ungleichungssystem

$|x| < |-x + 1|$, $|x-1| \geqq |-x - 1|$, also mit $x < 0,5$; $x \leqq 0$, d. h. mit $x \leqq 0$.

Zur Menge M gehören daher unter den Bedingungen des Falles (c) genau diejenigen Punkte, die auf dem Teil der Geraden $y = -x + 3$ liegen, für den $x \leqq 0$ gilt.

(d) Es sei $|x| < |y - 2|$, $|x - 1| < |y - 4|$.

Dann ist (1) gleichbedeutend mit $|y - 2| = |y - 4|$, also mit $y = 3$. Hierfür sind die Bedingungen des Falles (d) gleichbedeutend mit dem Ungleichungssystem $|x| < 1$, $|x-1| < 1$, also mit $-1 < x < 1$; $0 < x < 2$ und folglich mit $0 < x < 1$.

Zur Menge M gehören daher unter den Bedingungen des Falles (d) genau diejenigen Punkte, die auf dem Teil der Geraden $y = 3$ liegen, für den $0 < x < 1$ gilt.

Zusammenfassung: Zur Menge M gehören genau alle Punkte Z (x;y), für die gilt:

(1) $x \leqq 0$; $y = -x + 3$ oder

(2) $0 < x < 1$; $y = 3$ oder

(3) $x \geqq 1$; $y = -x + 4$.

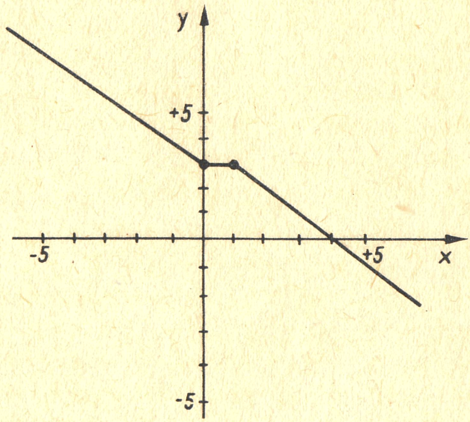

Abb. L 1246B