A 11/12; I XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1231) In die 64 Felder eines Schachbretts sind die Zahlen 1, 2, ..., 64 so eingetragen, daß in der ersten waagerechten Reihe von links nach rechts die Zahlen 1,2,..., 8, in der zweiten waagerechten Reihe von links nach rechts die Zahlen 9, 10, ..., 16 usw. in dieser Reihenfolge stehen. Jemand soll nun acht Türme so auf Felder des Schachbretts stellen, daß keine zwei von ihnen einander schlagen können. Danach soll er die Summe S der Zahlen bilden, die auf den von den Türmen besetzten Feldern stehen. Es sind alle dabei möglichen Werte von S anzugeben.

Anmerkung:
(Zwei Türme können einander genau dann schlagen, wenn sie auf einer gemeinsamen waagerechten oder senkrechten Felderreihe stehen).

1232) Gegeben sei eine rationale Zahl c. Ferner sei M die Menge aller derjenigen Paare (a, b) aus rationalen Zahlen a, b, für die $a + b = c$ gilt.

Beweise, daß unter allen Produkten $a \cdot b$ mit $(a, b) \in M$ dasjenige am größten ist, das aus dem Paar (a, b) mit $a = b$ gebildet wurde!

A 11/12; I

1233) Im Innern eines Würfels ABCDEFGH mit den Seitenflächen ABCD, ABFE, BCGF, CDHG, DAEH, EFGH und mit der Kantenlänge a befindet sich ein gerader Kreiskegelkörper mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Seine Spitze fällt mit dem Eckpunkt A des Würfels zusammen.

(b) Seine Achse liegt auf der Raumdiagonalen AG des Würfels.

(c) Seine Grundfläche hat mit jeder einer der drei Seitenflächen des Würfels, auf denen G liegt, genau einen Punkt gemeinsam.

Man beweise:

Ist α die Größe des Winkels zwischen einer Seitenlinie und der Achse und r der Radius der Grundfläche des Kegelkörpers, so gilt

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{\cot\alpha + \sqrt{2}}.$$

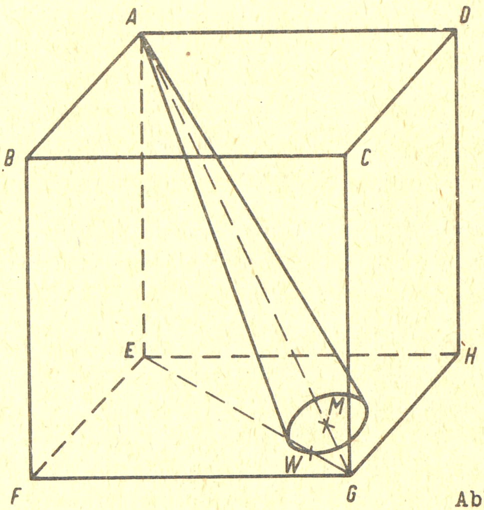

Abb. A 1233

A 11/12; II XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

<u>Achtung</u>: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1234) Es ist zu untersuchen, ob es eine Funktion

$$y = \log_a (bx + c) \quad \text{mit } a, b, c \text{ reell; } a > 1$$

gibt, deren Graph in einem x, y-Koordinatensystem durch die Punkte (2; 2), (-1; 0) und (0; 1) verläuft.

Man gebe, falls es eine solche Funktion gibt, alle reellen geordneten Zahlentripel (a, b, c) an, für die das zutrifft.

1235) Es seien in der Ebene fünf Punkte F, G, H, I, K gegeben, von denen keine drei auf derselben Geraden liegen.

Man begründe und beschreibe die Konstruktion eines Fünfecks A B C D E für das F, G, H, I, K in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DE, EA des Fünfecks sind. Man untersuche, ob ein solches Fünfeck A B C D E durch die gegebenen Punkte F, G, H, I, K eindeutig bestimmt ist. Dabei wird nicht vorgeschrieben, daß das Fünfeck A B C D E konvex, nicht konvex oder überschlagen ist; es soll auch zugelassen sein, daß Ecken miteinander zusammenfallen oder Seiten teilweise ineinander oder in der Verlängerung voneinander liegen.

A 11/12; II

Von den folgenden Aufgaben 1236 A und 1236 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

1236 A) Ein in einem industriellen Prozeß eingebauter Meßkomplex M übermittelt an eine Übertragungseinheit A_1 genau eines der beiden Signale S_1 oder S_2, das dann von A_1 zu einer Übertragungseinheit A_2, von A_2 zu einer Übertragungseinheit A_3 und von A_3 zu einem Elektronenrechner R übermittelt wird. Jede Übertragungseinheit A_i $(i = 1,2,3)$ kann genau die Signale S_1 oder S_2 übermitteln. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß A_i statt des jeweils empfangenen Signals gerade das andere weitervermittelt, betrage 0,01.

Es sei nun bekannt, daß am Ende eines solchen Ablaufes durch A_3 in den Rechner R das Signal S_1 übertragen wurde.

Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß M zu Beginn dieses Ablaufes an A_1 ebenfalls S_1 übermittelt hatte?

Hinweis:

Wenn sich unter Voraussetzungen V in einer großen Anzahl n von Fällen insgesamt g solche befinden, bei denen ein Ereignis E eintritt bzw. eingetreten ist, so heißt die Zahl $p = \frac{g}{n}$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten (bzw. Eingetretensein) von E unter den Voraussetzungen V.

Zur Lösung können außerdem folgende Sätze verwendet werden:

Das Additionsgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung für unabhängige Ereignisse.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von zwei einander ausschließenden Ereignissen E_1 und E_2 eins von beiden eintritt, ist gleich der Summe $p_1 + p_2$ der Wahrscheinlichkeit p_1 für das Eintreten von E_1 und der Wahrscheinlichkeit p_2 für das Eintreten von E_2.

__Das Multiplikationsgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung:__

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Ereignis E und ein Ereignis F eintreten, ist gleich dem Produkt $p \cdot q$ der Wahrscheinlichkeit p für das Eintreten von E und der Wahrscheinlichkeit q dafür, daß unter der Voraussetzung von E das Ereignis F eintritt.

1236 B) Es seien p eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion mit der Eigenschaft

$$f(x+p) = \frac{f(x)}{3f(x)-1} \qquad (1)$$

für alle reellen x.

a) Man beweise, daß jede derartige Funktion f (sofern es solche gibt) periodisch ist, d. h., daß es zu ihr eine von Null verschiedene reelle Zahl q gibt, so daß

$$f(x+q) = f(x) \quad \text{für alle reellen } x \qquad (2)$$

gilt.

b) Man gebe für einen speziellen Wert von p eine solche nicht konstante Funktion f konkret an.

__Hinweis:__ Man kann insbesondere untersuchen, ob eine Funktion vom Typ $f(x) = \frac{a + b \sin^2 x}{c + d \sin^2 x}$ bei geeigneten Werten der Konstanten a, b, c, d für alle reellen x definiert ist, die Eigenschaft (1) hat und nicht konstant ist.

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

<u>Achtung</u>: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1231) <u>Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Da ein Schachbrett genau 8 waagerechte und genau 8 senkrechte Reihen besitzt, lassen sich 8 Türme nur so unter der angegebenen Bedingung aufstellen, daß in jeder waagerechten und in jeder senkrechten Reihe genau 1 Turm steht.

Nun lassen sich die in die Felder eingetragenen Zahlen folgendermaßen darstellen:

1	2	3	4	.	.
9	10	11	12	.	.
17	18	19	20	.	.
.	.	.	.	.	.

0+1	0+2	0+3	0+4	.	.
8+1	8+2	8+3	8+4	.	.
16+1	16+2	16+3	16+4	.	.
.	.	.	.	.	.

In jeder waagerechten Reihe stehen dabei als zweite Summanden der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und in jeder senkrechten Reihe als erste Summanden der Reihe nach die Zahlen 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56.

Mithin gilt für jeden möglichen Wert von S, da jede waagerechte und jede senkrechte Reihe genau einmal vorkommt:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \\ + 0 + 8 + 16 + 24 + 32 + 40 + 48 + 56 \\ = \frac{9}{2} \cdot 8 + \frac{64}{2} \cdot 7 = 260,$$

unabhängig davon, wie die Verteilung der 8 Türme (unter Beachtung der Bedingungen) ausfällt.

1232) <u>Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Das Paar (a, b) $\in$ M mit a = b besteht aus den Zahlen
$a = \frac{c}{2}$, $b = \frac{c}{2}$.

Für jedes Paar (a,b) $\in$ M sei t diejenige Zahl, für die
$a = \frac{c}{2} + t$ ist;

dann ist $b = c - a = c - (\frac{c}{2} + t) = \frac{c}{2} - t$, also
$a \cdot b = (\frac{c}{2} + t)(\frac{c}{2} - t) = \frac{c^2}{4} - t^2 \leq \frac{c^2}{4}$, da stets $t^2 \geq 0$
gilt.

Also ist das aus dem Paar $(\frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2})$ gebildete Produkt $\frac{c^2}{4}$
unter allen Produkten a $\cdot$ b mit (a, b) $\in$ M am größten,
w.z.b.w..

1233) <u>Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

Nach Voraussetzung (b) liegt M auf AG. Die Grundkreisfläche des geraden Kreiskegels steht daher senkrecht auf jeder AG enthaltenden Ebene, insbesondere der Ebene ε durch A, E, G. Daher gehört mit jedem Punkt W der Grundkreisfläche auch jeder bezüglich ε spiegelbildlich zu W gelegene Punkt W' zur Grundkreisfläche. Folglich muß der nach (c) einzige vorhandene gemeinsame Punkt der Grundkreisfläche mit der Seitenfläche σ durch E, F, G in der Ebene ε, also auf EG liegen, da sonst sein Spiegelpunkt $W' \neq W$ bzgl. ε auch gemeinsamer Punkt dieser Seitenfläche und der Grundkreisfläche wäre; denn mit W liegt W' ebenfalls in σ, weil σ bezüglich ε spiegelbildlich zu sich selbst ist.

Der Schnitt von ε mit dem Würfel und dem Kegelkörper ist in Abb. L 1233 dargestellt. Er ist ein Rechteck mit den Seitenlängen a und $a\sqrt{2}$, in dem zugleich eine Achsenschnittfigur des Kegels enthalten ist.

Es sei $\sphericalangle GAE = \delta$. Dann ist $\cot \delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ist s die Länge der Seitenlinie des Kreiskegelkörpers, dann gilt:

$\cos(\delta - \alpha) = \frac{a}{s}$ bzw. $s = \dfrac{a}{\cos(\delta-\alpha)}$. Ferner gilt für den Grundkreisradius r des Kegelkörpers $r = s \cdot \sin\alpha$.

Hieraus ergibt sich:

$$r = \frac{a \cdot \sin\alpha}{\cos(\delta - \alpha)}$$ oder

$$r = \frac{a \cdot \sin\alpha}{\cos\delta \, \cos\alpha + \sin\delta \, \sin\alpha}.$$

Da $\cos\delta = \dfrac{\cot\delta}{\sqrt{1+\cot^2\delta}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

und $\sin\delta = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ist,

ergibt sich:

$$r = \frac{a \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin\alpha}$$ bzw.

$$r = \frac{\sqrt{3}\, a \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha + \sqrt{2}\, \sin\alpha}$$ also

$$r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{\cot\alpha + \sqrt{2}},$$ w.z.b.w..

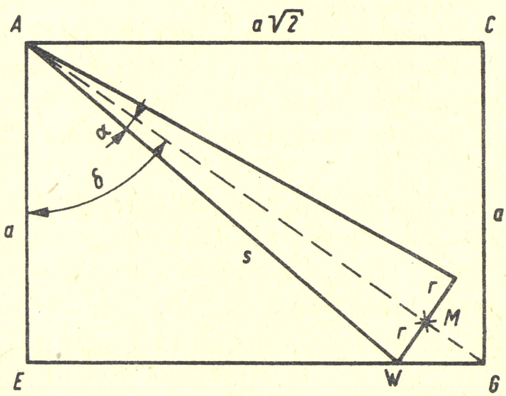

Abb. L 1233

L 11/12; II XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

<u>Achtung</u>: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1234) <u>Lösung</u>: <u>5 Punkte</u>

Angenommen, es gibt ein solches Zahlentripel, für das die angegebene Funktion die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann gilt

(1) $\log_a (2b + c) = 2,$

(2) $\log_a (-b + c) = 0,$

(3) $\log_a c = 1.$

Aus (3) folgt $c = a$, aus (2) entsprechend $b = c - 1$. Daraus und aus (1) erhält man

$\log_c (3c - 2) = 2$, also $3c - 2 = c^2$. Diese Gleichung hat genau die Lösungen $c = 1$ und $c = 2$. Wegen $c = a > 1$ können somit höchstens für $c = 2$ und damit $a = 2$ sowie $b = 1$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sein.

Tatsächlich gilt für die Funktion $y = \log_2 (x + 2)$:

(1') $\log_2 (2 + 2) = 2,$

(2') $\log_2 (-1 + 2) = 0,$

(3') $\log_2 (2) = 1.$

Folglich ist (2; 1; 2) das einzige reelle Zahlentripel, das die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

1235) <u>Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

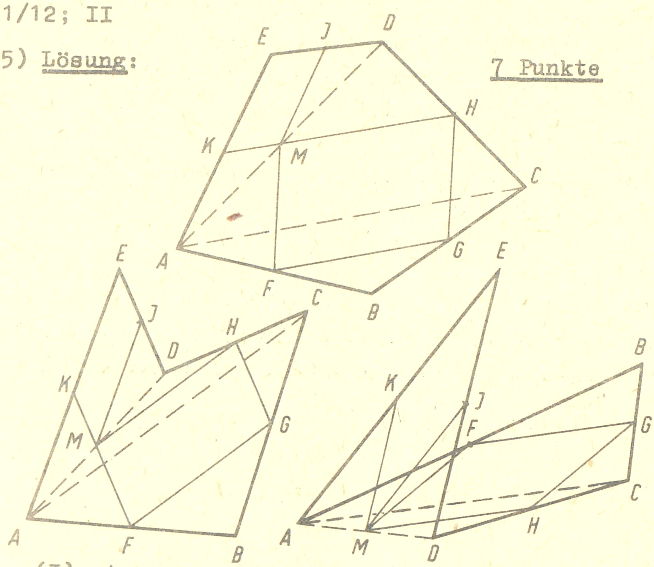

Abb. L 1235

(I) Angenommen, ein Fünfeck ABCDE habe die geforderte Eigenschaft. Dann gilt $A \neq C$, da aus $A = C$ im Widerspruch gegen $F \neq G$ folgen würde, daß die Strecken AB und BC denselben Mittelpunkt hätten. Entsprechend folgt $B \neq D$. Der Mittelpunkt von AD sei M. Dann gilt wegen $A \neq C$
auch $M \neq H$
und wegen $B \neq D$
auch $M \neq F$.

Nunmehr folgt aus der Umkehrung eines Teiles des Strahlensatzes:

$FG \parallel AC$, sowie $AC \parallel MH$ und folglich $FG \parallel MH$. Analog folgt
$HG \parallel DB$ sowie $DB \parallel MF$ und folglich $HG \parallel MF$.

Also ist FGHM ein Parallelogramm.

Liegen nun A, D, E nicht auf derselben Geraden, so liegen K, I, M nicht auf derselben Geraden, und es gilt nach der Umkehrung eines Teils des Strahlensatzes $MK \parallel IE$ sowie $MI \parallel KE$, also ist auch KMIE ein Parallelogramm.
Liegen aber A, D, E auf derselben Geraden, so auch K, I, M; es gilt eine der Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AE} + \overline{ED} = \overline{AD} \\ \overline{AD} + \overline{DE} = \overline{AE} \\ \overline{EA} + \overline{AD} = \overline{ED} \end{array}\right\} \text{ und damit jeweils}$$

$$\overline{KE} = \frac{1}{2}\,\overline{AE} = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\,(\overline{AD} - \overline{ED}) = \overline{MD} - \overline{ID} \\ \frac{1}{2}\,(\overline{AD} + \overline{DE}) = \overline{MD} + \overline{DI} \\ \frac{1}{2}\,(\overline{ED} - \overline{AD}) = \overline{ID} - \overline{MD} \end{array}\right\} = \overline{MI} \quad \text{sowie}$$

$$\overline{EI} = \frac{1}{2}\,\overline{ED} = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\,(\overline{AD} - \overline{AE}) = \overline{AM} - \overline{AK} \\ \frac{1}{2}\,(\overline{AE} - \overline{AD}) = \overline{AK} - \overline{AM} \\ \frac{1}{2}\,(\overline{EA} + \overline{AD}) = \overline{KA} + \overline{AM} \end{array}\right\} = \overline{KM}\,.$$

Daraus folgt, daß ein Fünfeck ABCDE nur dann die geforderten Eigenschaften hat, wenn es sich auf folgende Weise konstruieren läßt:

(II) (1) Man konstruiert zu den Punkten F, G, H den Punkt M, für den FGHM ein Parallelogramm ist.

(2) Liegen die Punkte K, I, M nicht auf derselben Geraden, so konstruiert man zu ihnen den Punkt E, für den KMIE ein Parallelogramm ist.
Liegen aber K, I, M auf derselben Geraden, so konstruiert man den (dann eindeutig bestimmten) Berührungspunkt E des Kreises*) um K mit $\overline{MI}$ und des Kreises*) um I mit $\overline{KM}$.

*) Hier sind auch (für M = I oder K = M) zum Punkt entartete Kreise zugelassen.

(3) Man konstruiert im Fall $E \neq K$ auf dem Strahl aus E durch K den Punkt $A \neq E$, für den $\overline{EK} = \overline{KA}$ gilt, im Fall $E = K$ den Punkt $A = E = K$.

(4) Man konstruiert im Fall $A \neq F$ auf dem Strahl aus A durch F den Punkt $B \neq A$, für den $\overline{AF} = \overline{FB}$ gilt, im Fall $A = F$ den Punkt $B = A = F$.

(5) Man konstruiert im Fall $B \neq G$ auf dem Strahl aus B durch G den Punkt $C \neq B$, für den $\overline{BG} = \overline{GC}$ gilt, im Fall $B = G$ den Punkt $C = B = G$.

(6) Man konstruiert im Fall $C \neq H$ auf dem Strahl aus C durch H den Punkt $D \neq C$, für den $\overline{CH} = \overline{HD}$ gilt, im Fall $C = H$ den Punkt $D = C = H$.

(III) Jedes so konstruierte Fünfeck ABCDE entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:

Laut Konstruktion sind die Punkte K, F, G, H die Mittelpunkte der Seiten EA, AB, BC, CD.

Ist M' der Mittelpunkt von AD, so folgt daher, wie zu Beginn von (I), daß FGHM' ein Parallelogramm ist. Hieraus ergibt sich $M' = M$, d. h. M ist der Mittelpunkt von AD.

Daraus folgt, wenn $K \neq M$, also $E \neq D$ ist, $KM \parallel ED$, mithin liegt wegen $KM \parallel EI$ der Punkt I auf der Geraden durch E, D und ist wegen $\overline{KM} = \overline{EI} = \frac{1}{2}\,\overline{ED}$ sowie $\triangle AKM \cong \triangle MID$ (sws), also $\overline{KM} = \overline{ID}$ Mittelpunkt der der Seite DE.

Für $K = M$ folgt $E = D$ sowie nach Konstruktion $I = E$, also ist ebenfalls I Mittelpunkt von DE.

(IV) Sämtliche Konstruktionsschritte sind eindeutig. Folglich gibt es genau ein derartiges Fünfeck ABCDE.

Anmerkung:

Die Konstruktion ist auch durchführbar, wenn man lediglich fordert, daß nicht sämtliche fünf Punkte F, G, H, I, K auf derselben Geraden liegen.

1236A) Lösung: 8 Punkte

1. Lösungsweg: (durch möglichst weitgehenden Rückgriff auf die angegebene Wahrscheinlichkeitsdefinition)

Es sei S eines der Signale S_1, S_2; es sei S' das andere dieser beiden Signale. Dann gilt:

Übermittelt M in einer großen Anzahl n von Fällen das Signal S, so übermittelt A_1

(1) in ~~0,001 x~~ 0,01 n Fällen S',

(2) in 0,99n ~~x~~ Fällen S .

Dann übermittelt A_2 von den in (1) genannten Fällen

in 0,01 · 0,01n = 0,0001 n Fällen S,
in 0,99 · 0,01n = 0,0099 n Fällen S',

von den in (2) genannten Fällen

in 0,01 · 0,99n = 0,0099n Fällen S',
in 0,99 · 0,99n = 0,9801n Fällen S;

somit übermittelt insgesamt A_2

(3) in 0,0099n + 0,0099n = 0,0198n Fällen S',

(4) in 0,0001n + 0,9801n = 0,9802n Fällen S.

Hiernach übermittelt A_3 von den in (3) genannten Fällen

in 0,01 · 0,0198n = 0,000198n Fällen S,
in 0,99 · 0,0198n = 0,019602n Fällen S',

von den in (4) genannten Fällen

in 0,01 · 0,9802n = 0,009802n Fällen S',
in 0,99 · 0,9802n = 0,970398n Fällen S;

somit übermittelt insgesamt A_3

(5) in 0,019602n + 0,009802n = 0,029404n Fällen S',

(6) in 0,000198n + 0,970398n = 0,970596n Fällen S.

Wendet man diese Überlegung einmal mit $S = S_1$ und einmal mit $S = S_2$ an, so erhält man folgende Aussagen:

Übermittelt M in einer großen Anzahl n von Fällen S_1, so übermittelt A_3 in 0,970596n Fällen S_1.

Übermittelt M aber in n Fällen S_2, so übermittelt A_3 in 0,029404n Fällen S_1.

Unter den insgesamt 0,970596n + 0,029404n = n Fällen, in denen hiernach A_3 das Signal S_1 übermittelt, befänden sich also 0,970596n solche, in denen bereits M ebenfalls S_1 übermittelt hatte.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt daher

$$\frac{0{,}970596n}{n} = 0{,}970596.$$

<u>2. Lösungsweg</u>: (durch stärkere Anwendung der bereitgestellten Sätze):

Nach Voraussetzung übermittelte A_3 das Signal S_1.
Es wird nun schrittweise die Wahrscheinlichkeit $p_i(S_j)$ berechnet, mit der das Signal S_j als Eingangssignal von A_i auftrat ($i = 3, 2, 1$ und $j = 1, 2$). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit p ergibt sich dann als $p = p_1(S_1)$.

<u>i = 3</u>: Die Wahrscheinlichkeit, daß bei vorausgesetztem Ausgangssignal S_1 auch S_1 als Eingangssignal von A_3 auftritt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, mit der A_3 ein Signal richtig überträgt, also gilt

$$p_3(S_1) = 0{,}99.$$

Die Wahrscheinlichkeit $p_3(S_2)$ ist gleich der Wahrscheinlichkeit, mit der A_3 ein Signal falsch überträgt, also

$$p_3(S_2) = 0{,}01.$$

<u>i = 2</u>: Für das Auftreten von S_1 als Eingangssignal von A_2 gibt es genau zwei Möglichkeiten:

(a) S_1 ist Eingangssignal von A_3 und von A_2,

(b) S_2 ist Eingangssignal von A_3, und S_1 ist Eingangssignal von A_2.

Die Wahrscheinlichkeit $p(a)$ für das Eintreten der Möglichkeit (a) kann nun nach dem Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung bestimmt werden. Danach ist $p(a)$ gleich dem Produkt von $p_3(S_1)$ mit der Wahrscheinlichkeit des Auftretens von S_1 als Eingangssignal von A_2 unter der Voraussetzung, daß S_1 Eingangssignal von A_3 ist. Diese letzte Wahrscheinlichkeit ist aber gleich der Wahrscheinlichkeit, mit der A_2 ein Signal richtig überträgt. Also ergibt sich:

$$p(a) = p_3(S_1) \cdot 0{,}99 = 0{,}9801.$$

Analog ergibt sich für $p(b)$

$$p(b) = p_3(S_2) \cdot 0{,}01 = 0{,}0001.$$

Die Wahrscheinlichkeit $p_2(S_1)$ ist gleich der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der Möglichkeit (a) oder (b). Da beide Möglichkeiten unabhängig voneinander eintreten können, gilt nach dem Additionssatz:

$$p_2(S_1) = p(a) + p(b) = 0{,}9801 + 0{,}0001 \qquad (1)$$
$$= 0{,}9802.$$

Für $p_2(S_2)$ erhält man nach analogen Schlüssen

$$p_2(S_2) = 0{,}01 \cdot p_3(S_1) + 0{,}99 \cdot p_3(S_2) = 0{,}0099+0{,}0099$$
$$=0{,}0198$$

<u>$i = 1$:</u>

Wir schließen analog zum Fall $i = 2$:
Für das Auftreten von S_1 als Eingangssignal von A_1 gibt es genau zwei Möglichkeiten:

(c) S_1 ist Eingangssignal von A_2 und von A_1,

(d) S_2 ist Eingangssignal von A_2, und S_1 ist Eingangssignal von A_1.

Es sei p(c) bzw. p(d) die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der Möglichkeit (c) bzw. (d). Dann gilt analog zu (1):

$$p_1(S_1) = p(c) + p(d) = 0{,}99 \cdot p_2(S_1) + 0{,}01 \cdot p_2(S_2) =$$
$$= 0{,}970398 + 0{,}000198$$
$$= 0{,}970596.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit p ist damit ermittelt,
$p = 0{,}970596$.

1236B) <u>Lösung</u>: <u>8 Punkte</u>

Angenommen, es sei p eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine für alle reellen x definierte Funktion mit

$$f(x + p) = \frac{f(x)}{3f(x) - 1} \quad \text{für alle reellen } x. \qquad (1)$$

a) Dann gilt für alle reellen x

$$3\,f(x) - 1 \neq 0$$

und

$$f(x+2p) = f(x+p+p) = \frac{f(x+p)}{3f(x+p)-1} = \frac{\dfrac{f(x)}{3f(x)-1}}{\dfrac{3f(x)}{3f(x)-1} - 1},$$

also

$$f(x+2p) = \frac{f(x)}{3f(x) - 3f(x) + 1} = f(x),$$

d. h., f ist periodisch: es gilt mit $q = 2p \neq 0$

$$f(x+q) = f(x) \text{ für alle reellen } x. \qquad (2)$$

b) Da jede Funktion vom Typ

$$f(x) = \frac{a + b\sin^2 x}{c + d\sin^2 x}, \qquad (3)$$

sofern sie für alle reellen x definiert ist, die Periode π hat, kann man (unter Berücksichtigung des Ergebnisses aus a)) versuchen, ob sich die Eigenschaft (1) mit $p = \frac{\pi}{2}$ erreichen läßt.

Nun ist für solche Funktionen einerseits

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a + b\cos^2 x}{c + d\cos^2 x} = \frac{a + b - b\sin^2 x}{c + d - d\sin^2 x}, \qquad (4)$$

andererseits

$$\frac{f(x)}{3f(x) - 1} = \frac{a+b\sin^2 x}{c+d\sin^2 x} : \frac{3a + 3b\sin^2 x - c - d\sin^2 x}{c + d\sin^2 x}$$
$$= \frac{a + b\sin^2 x}{(3a-c) + (3b-d)\sin^2 x}, \qquad (5)$$

wobei für die Wahl von a, b, c, d zunächst vorauszusetzen ist, daß $c + d\sin^2 x \neq 0$ und $(3a - c) + (3b - d)\sin^2 x \neq 0$ für alle x gilt. Übereinstimmung der Zähler in den rechten Seiten von (4), (5) erreicht man z. B. für $b = 0$ und hiernach Übereinstimmung der Nenner vermittels $c + d = 3a - c$ etwa für $a = c = d = 1$.

Die somit betrachtete Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1 + \sin^2 x}$

hat in der Tat alle verlangten Eigenschaften. Sie ist nicht konstant; sie ist wegen $1 + \sin^2 x \neq 0$ für alle x definiert und erfüllt wegen $2 - \sin^2 x \neq 0$ für alle x nach (4), (5) auch (1).