L 11/12 XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11 und 12

1221) **Lösung:** **8 Punkte**

Es ist $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{4}$.

Behauptung:

Der Term $f(n) = \frac{1}{n+1}$ hat die Eigenschaft (1).

Beweis durch vollständige Induktion:

(I) Die Behauptung ist richtig für n = 0; denn es gilt

$$f(0) = \frac{1}{0+1} = 1 = x_o.$$

(II) Nun zeigen wir, daß für jede natürliche Zahl $k \geqq 0$ aus der Richtigkeit der Behauptung für n = k ihre Richtigkeit für n = k + 1 folgt:

Aus $f(k) = \frac{1}{k+1} = x_k$ folgt

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{x_k + 1} = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k+1} + 1} = \frac{1}{k+2} = \frac{1}{(k+1)+1}$$

$$= f(k+1).$$

Anderer Lösungsweg:

Behauptung wie oben.

Beweis: Die Zahlenfolge $\{z_n\}$ n = 0, 1, 2, ..., die durch

$z_n = \frac{1}{n+1}$ definiert ist, hat die Eigenschaften

$$z_o = \frac{1}{0+1} = 1 \quad \text{und}$$

$$z_n = \frac{1}{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{z_{n-1}}{1 + z_{n-1}} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Da diese Eigenschaften die gegebene Folge $\{x_n\}$ eindeutig festlegen, gilt $x_n = z_n = \frac{1}{n+1}$ (n = 1,1,2,...), w.z.b.w..

1222) <u>Lösung:</u> 9 Punkte

Angenommen, die Tabelle ließe sich durch natürliche Zahlen von 0 bis 9 unter Beachtung der Bedingungen (1), (2) (3) ausfüllen, dann müßte die Summe s der zwölf in der Tabelle eingetragenen Zahlen sowohl durch 3 als auch durch 4, also, da 3 und 4 teilerfremd sind, durch 12 teilbar sein. Wegen (3) dürfte s nicht kleiner als $4 \cdot 16 = 64$ sein. Da in einem Feld der Tabelle die Zahl 0 bereits steht, könnte wegen (1) die Summe s nicht größer als $2 \cdot (9 + 8 + 7 + 6 + 5) + 4 + 0 = 74$ sein.

Aus $64 \leqq s \leqq 74$ und $12 \mid s$ folgte aber $s = 72$. Wegen (2) müßte daher jede Zeilensumme gleich 24 und wegen (3) jede Spaltensumme gleich 18 sein. Dann müßte aber in der Spalte, in der 0 bereits steht, zweimal die Zahl 9 stehen. Die Summe der Zeile, in der 0 bereits steht, könnte nun aber nur noch höchstens $8 + 8 + 7 + 0 = 23$ und nicht 24 werden.

Es gibt also keine Möglichkeit, die Tabelle in der geforderten Weise auszufüllen.

1223) <u>Lösung:</u> 12 Punkte

O.B.d.A. sei F auf der Verlängerung von DA über A hinaus, also auch auf der Verlängerung von CB über B hinaus gelegen. Ferner lassen sich die Bezeichnungen so wählen, daß g die Strecke BF in einem Punkte G schneidet. Die Gerade h verläuft in das Innere des Dreiecks FCD hinein, schneidet also die Strecke AC in einem Punkte H.

Dann gilt (1) $\overline{\sphericalangle DAC} = \overline{\sphericalangle DBC}$ als Peripheriewinkel über demselben Bogen $\overset{\frown}{CD}$.

Daraus folgt (2) $\overline{\sphericalangle EAF} = \overline{\sphericalangle EBG}$ als Nebenwinkel zweier gleichgroßer Winkel.

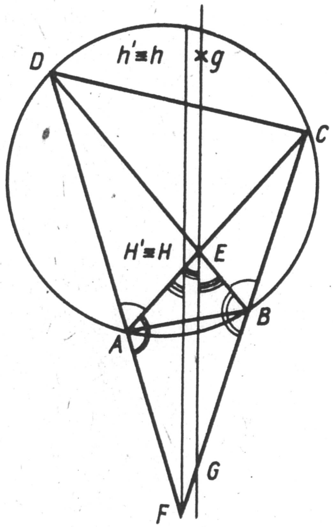

Abb. L 1223

Wir ziehen nun die Parallele h' zu g durch F. Sie schneidet AC in einem Punkte H'. Die Gerade h' verläuft nämlich ebenfalls in das Innere des Dreiecks FCD hinein. Das wäre nur dann nicht das Fall, wenn der Winkel $\sphericalangle AEG$ größer oder gleich $180^\circ - \overline{\sphericalangle EAF}$ wäre. Dann wäre aber

$\overline{\sphericalangle AEG} + \overline{\sphericalangle EAF} = 180^\circ$ und wegen (2)

$\overline{\sphericalangle EBG} + \overline{\sphericalangle BEG} = 180^\circ$, also

$\overline{\sphericalangle AEG} + \overline{\sphericalangle EAF} + \overline{\sphericalangle EBG}\ (= \overline{\sphericalangle EBF}) + \overline{\sphericalangle BEG} = 360^\circ$, was nicht möglich ist.

Folglich gibt es stets einen solchen Punkt H' auf AC.

Nun gilt $\overline{\sphericalangle BEG} = \overline{\sphericalangle AEG}$ laut Voraussetzung, sowie

$\overline{\sphericalangle AH'F} = \overline{\sphericalangle AEG}$ als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen.

Daraus folgt: $\overline{\sphericalangle AH'F} = \overline{\sphericalangle BEG}$.

Wegen (2) und (3) gilt daher unter Benutzung des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck

(4) $\overline{\sphericalangle AFH'} = \overline{\sphericalangle EGB}$

Weiterhin gilt (5) $\overline{\sphericalangle EGB} = \overline{\sphericalangle H'FB}$ als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen.

Aus (4) und (5) folgt nun $\overline{\sphericalangle AFH'} = \overline{\sphericalangle H'FB}$, d. h., h' halbiert den Winkel $\sphericalangle AFB$. Mithin gilt $h' \equiv h$, woraus $h \parallel g$ folgt.

1224) <u>Lösung:</u> <u>11 Punkte</u>

Angenommen, (x, y, z) sei eine reelle Lösung des Gleichungssystems (1), (2), (3). Dann gilt wegen (1)

$z = (-x - y)$ (4) daher wegen (2)

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = 1$, also $x^2 + y^2 + xy = \frac{1}{2}$, und mithin

$(x^2 + y^2 + xy)^2 = x^4 + y^4 + 3x^2y^2 + 2xy\,(x^2 + y^2) = \frac{1}{4}$. (5)

Andererseits folgt aus (3) und (4)

$a = x^4 + y^4 + z^4 = x^4 + y^4 + (x^2 + y^2 + 2xy)^2$

$\quad = 2\,(x^4 + y^4 + 3x^2y^2 + 2xy\,(x^2 + y^2))$, also

$x^4 + y^4 + 3x^2y^2 + 2xy\,(x^2 + y^2) = \frac{a}{2}$. (6)

(I) Ist $a \neq \frac{1}{2}$, so widersprechen die Gleichungen (5) und (6) einander. Daher hat in diesem Falle das Gleichungssystem (1), (2), (3) keine Lösung.

(II) Ist $a = \frac{1}{2}$, so folgt aus (5) - das ist nun dasselbe wie (6) - und (4), daß höchstens diejenigen Tripel (x, y, (-x-y)) Lösungen von (1), (2), (3) sein können, bei denen x und y die Gleichung

$x^2 + y^2 + xy = \frac{1}{2}$ (7) erfüllen.

Umgekehrt gilt im Falle $a = \frac{1}{2}$ für jedes Tripel (x,y,(-x-y)) mit der Eigenschaft (7)

$x + y + z = x + y + (-x-y) = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (-x-y)^2 = 2(x^2+y^2+xy) =$

$= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$

$x^4 + y^4 + z^4 = x^4 + y^4 + (-x-y)^4 = 2(x^2+y^2+xy)^2 =$

$= 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = a.$

Daher hat im Falle $a = \frac{1}{2}$ das Gleichungssystem (1), (2), (3) genau diese Tripel als Lösung. Wie das Beispiel $(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$, $(0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ zeigt, gibt es mehrere solche Tripel.

(Es gibt sogar unendlich viele derartige Tripel, da die Gleichung (7) unendlich viele reelle Lösungen (x,y) hat. Dieser Nachweis wird aber laut Aufgabenstellung nicht verlangt. Es ist auch zulässig, die Existenz mehrerer Lösungen im Fall $a = \frac{1}{2}$ durch deren Angabe, ohne den Nachweis der obengenannten Charakterisierung vermittels (4) und (7), zu erbringen. Zu einer solchen Angabe kann man z. B. gelangen, indem man probiert, ob $x = 0$ zu einer Lösung führt, was in der Tat vermittels (1), (2) sofort die angegebenen Tripel liefert, für die man auch (3) bestätigt.)

Das Gleichungssystem (1), (2), (3) hat also

1. keine reelle Lösung, wenn $a \neq \frac{1}{2}$ ist,
2. genau eine reelle Lösung in keinem Falle,
3. mehr als eine reelle Lösung, wenn $a = \frac{1}{2}$ ist.