A 10; I XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stetq zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1041) Es sei $z = (1 - \frac{4}{1^2})(1 - \frac{4}{3^2})(1 - \frac{4}{5^2}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{4}{199^2})$

(wobei die Nenner der Subtrahenden in den Faktoren die Folge der ungeraden Quadratzahlen von 1^2 bis 199^2 durchlaufen). Man stelle die rationale Zahl z in der Form $z = \frac{p}{q}$ dar, wobei p, q ganze, teilerfremde Zahlen sind und $q > 0$ ist.

1042) Beweisen Sie folgenden Satz:
Ist ABCD ein Tangentenviereck mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{AD} = d$ und dem Inkreismittelpunkt M, so gilt

$$\frac{a}{c} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{BM}}{\overline{CM} \cdot \overline{DM}} .$$

30 05 74-1 /1000/75(588)

A 10; I

Von den nachstehenden Aufgaben 1043A und 1043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

1043A) Es sei ABCDS eine gerade vierseitige Pyramide mit fest vorgegebener quadratischer Grundfläche ABCD.
Wir betrachten alle geschlossenen Streckenzüge PQRTP, wobei P ein fest vorgegebener innerer Punkt der Kante AS, Q ein innerer Punkt von BS, R von CS sowie T von DS ist.

Man ermittle die Menge aller derjenigen Winkelgrößen φ ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$), für die folgendes gilt: Hat der Winkel $\sphericalangle$ASB die Größe φ, so existiert unter den auf der Pyramide ABCDS betrachteten Streckenzügen PQRTP ein kürzester.

1043B) Sechs Schüler eines Mathematikzirkels machen mit dem folgenden Ratespiel ein kleines Logiktrainig: Peter, Klaus, Monika, Ilona und Uwe verstecken fünf Gegenstände: Zirkel, Radiergummi, Lineal, Bleistift und Füller so bei sich, daß jeder genau einen dieser Gegenstände hat. Dann bekommt Dirk fünf Aussagen mitgeteilt, unter denen, wie ihm ebenfalls gesagt wird, genau zwei falsch sind. Die Aussagen lauten:

Uwe: "Wenn Peter den Zirkel nicht hat, dann hat Klaus das Lineal nicht."

Monika: "Uwe hat soeben eine wahre Aussage gemacht."

Peter: "Ich habe den Zirkel oder Klaus hat das Lineal nicht."

Klaus: "Ich habe das Lineal nicht oder Uwe hat den Bleistift."

Ilona: "Ich habe den Füller oder ich habe den Bleistift."

Man untersuche, ob sich nach diesen Regeln alle Verstecke der Gegenstände eindeutig ermitteln lassen. Wie lauten, falls dies möglich ist, die Verstecke?

A 10; II XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1044) Man ermittle alle rationalen Zahlen r, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^r + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^r = 4.$$

1045) In einem Klub Junger Mathematiker gibt es Streit um das Monotonieverhalten von Funktionen. Bekannt ist von zwei Funktionen f und g, daß beide für alle reellen Zahlen x definiert sind, f im gesamten Definitionsbereich streng monoton wächst, und daß die Gleichung $g(x)^2 - f(x)^2 = 1$ für alle x erfüllt ist. Annemarie folgert nun daraus: "Dann ist auch g eine auf dem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsende Funktion." Brigitte widerspricht: "Es läßt sich nur schließen, daß g im gesamten Definitionsbereich entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist." Christa meint: "Ihr habt beide nicht recht." Wer von diesen Schülerinnen hat nun recht?

Anmerkung: Eine Funktion f wird genau dann als streng monoton $\left\{\begin{matrix}\text{wachsend}\\ \text{fallend}\end{matrix}\right\}$ in einem Intervall bezeichnet, wenn für alle Zahlen x_1, x_2 aus diesem Intervall, für die $x_1 < x_2$ gilt, die Ungleichung $\left\{\begin{matrix}f(x_1) < f(x_2)\\ f(x_1) > f(x_2)\end{matrix}\right\}$ gilt.

30 05 74-1//1000/75(588)

1046) Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge a. Eine seiner Raumdiagonalen habe die Endpunkte X und Y. Die Mittelpunkte der von X ausgehenden Würfelkanten seien mit A, B, C, die Mittelpunkte der von Y ausgehenden Würfelkanten mit D, E, F so bezeichnet, daß A und E auf zwei zueinander parallelen Würfelkanten liegen, ebenso B und F und ebenso C und D (s. Abb. A 1046).

a) Man ermittle alle Möglichkeiten, eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Punkten A, B, C und den Punkten D, E, F so zu wählen, daß folgendes gilt: Die drei Strecken, die jeden der Punkte A, B, C jeweils mit seinem zugeordneten Punkt verbinden, und die sechs Strecken AB, BC, CA, DE, EF, FD sind die sämtlichen Kanten einer Figur, die entweder ein Polyeder (d. i. ein ebenflächig begrenzter Körper) ist oder aus mehreren Polyedern zusammengesetzt werden kann.

b) Wenn es Figuren der in a) genannten Art gibt, so ermittle man für jede von ihnen das Volumen.

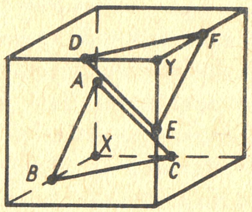


Abb. A 1046

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

1041) Lösung: 6 Punkte

Laut Aufgabe gilt:

$$z = \frac{1-4}{1^2} \cdot \frac{3^2 - 2^2}{3^2} \cdot \frac{5^2 - 2^2}{5^2} \cdot \ldots \cdot \frac{197^2 - 2^2}{197^2} \cdot \frac{199^2 - 2^2}{199^2}$$

$$= -3 \cdot \frac{(3-2)(3+2)}{3^2} \cdot \frac{(5-2)(5+2)}{5^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(197-2)(197+2)}{197^2} \cdot \frac{(199-2)(199+2)}{199^2}$$

$$= -3 \cdot \frac{1 \cdot 5}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 7}{5^2} \cdot \ldots \cdot \frac{195 \cdot 199}{197^2} \cdot \frac{197 \cdot 201}{199^2}$$

Dabei durchlaufen in den Zählern die ersten Faktoren die Folge der ungeraden Zahlen von 1 bis 197, die zweiten Faktoren die Folge der ungeraden Zahlen von 5 bis 201.
Also ist

$$z = \frac{-1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \ldots \cdot 195^2 \cdot 197^2 \cdot 199 \cdot 201}{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \ldots \cdot 195^2 \cdot 197^2 \cdot 199^2}$$

und damit $z = \frac{-201}{199}$.

1042) Lösung: 7 Punkte

Es seien P, Q, R, S in dieser Reihenfolge die auf AB, BC, CD, DA gelegenen Berührungspunkte des Inkreises mit dem Tangentenviereck. Ferner seien α, β, γ, δ in dieser Reihenfolge die Größen der Winkel $\sphericalangle AMP$, $\sphericalangle BMQ$, $\sphericalangle CMR$, $\sphericalangle DMS$.

Dann hat wegen $\triangle AMP \cong \triangle AMS$ (ssw; die gleichgroßen (rechten) Winkel $\sphericalangle APM$, $\sphericalangle CMD$ liegen den Hypotenusen, also den längsten Seiten in den Dreiecken AMP bzw. AMS, gegenüber) auch $\sphericalangle AMS$ die Größe α; ebenso haben $\sphericalangle BMP$, $\sphericalangle CMQ$, $\sphericalangle DMR$ in dieser Reihenfolge die Größen β, γ, δ.

30 05 74-1/1000/75(588)

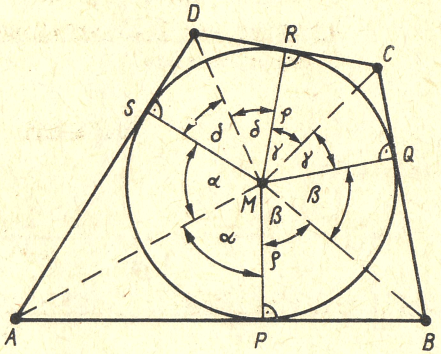


Abb. L 1042

Daraus folgt: $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$. Die Winkel- $\sphericalangle$ AMB und $\sphericalangle$ CMD, die die Größen $\alpha + \beta$ bzw. $\gamma + \delta$ haben, sind folglich Supplementwinkel, und es gilt

$\gamma + \delta = 180^\circ - \alpha - \beta$. (1)

Wegen $\overline{MP} = \overline{MR} = \varrho$ gilt nun für die Flächeninhalte F_1 bzw. F_2 der Dreiecke ABM bzw. CDM:

$$F_1 = \frac{1}{2} a \cdot \varrho = \frac{1}{2} \overline{AM} \cdot \overline{BM} \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

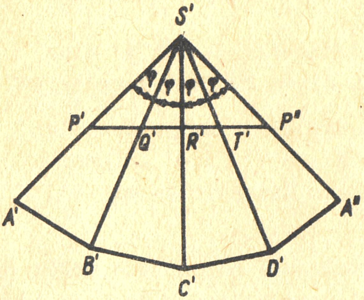
$$F_2 = \frac{1}{2} c \cdot \varrho = \frac{1}{2} \overline{CM} \cdot \overline{DM} \cdot \sin(\gamma + \delta).$$

Wegen (1) und $\sin(180^\circ - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$ folgt daraus

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a}{c} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{BM}}{\overline{CM} \cdot \overline{DM}}, \quad \text{w.z.b.w..}$$

1043A) <u>Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

$0^\circ < \varphi < 45^\circ$



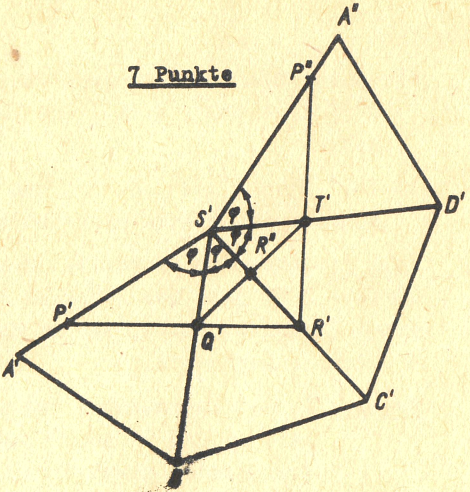


Abb. L 1043A

$45^\circ < \varphi < 90^\circ$

Wir denken uns den Pyramidenmantel längs der Kante SA aufgeschnitten und in eine Ebene so "abgewickelt", daß eine Figur wie in Abb. L 1043A entsteht, also ein Sechseck S'A'B'C'D'A", bei dem

$\triangle S'A'B' \cong \triangle SAB,$
$\triangle S'B'C' \cong \triangle SBC,$
$\triangle S'C'D' \cong \triangle SCD,$
$\triangle S'D'A'' \cong \triangle SDA$

und für den bei S' gelegenen Innenwinkel $\sphericalangle A'S'A''$ des Sechsecks $\sphericalangle A'S'A'' = 4\varphi$ gilt. Dabei gilt ferner:

(1) Jeder der betrachteten geschlossenen Streckenzüge PQRTP geht dabei in einen gleichlangen nicht geschlossenen Streckenzug P'Q'R'T'P" über, wobei P', Q', R', T', P" jeweils innere Punkte von SA', SB', SC', SD', SA" sind und $\overline{S'P'} = \overline{S'P''}$ ist.

Umgekehrt entspricht jedem der in (1) genannten Streckenzüge P'Q'R'T'P" ein gleichlanger Streckenzug PQRTP auf dem Pyramidenmantel.
Damit ist die Aufgabe darauf zurückgeführt, alle φ mit $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ zu ermitteln, für die unter allen bei (1) genannten Streckenzügen ein kürzester existiert.

Wir unterscheiden dazu zwei Fälle:

1) $0^\circ < 4\varphi < 180^\circ$, d. h., das Sechseck S'A'B'C'D'A" ist konvex.

2) $180^\circ \leqq 4\varphi < 360^\circ$, d. h., das Sechseck hat bei S' eine einspringende Ecke oder ist zu einem Fünfeck ausgeartet.

<u>Fall 1:</u> Wegen der Konvexität des Sechsecks schneidet die Strecke P'P" jede der Strecken S'B', S'C', S'D' in genau einem (inneren) Punkt, die in dieser Reihenfolge mit Q', R', T', bezeichnet seien.

<u>Beweis:</u> Da der Innenwinkel des Sechsecks bei S' die Größe 4φ hat, liegen P' und P" auf verschiedenen Seiten jeder der Geraden durch S' und B', durch S' und C', sowie durch S' und D'. Folglich schneidet P'P" jede dieser Geraden, und zwar im Innern des Sechsecks, also im Innern der Strecken S'B', S'C', S'D', da das Sechseck konvex ist.

Daher ist P'Q'R'T'P" in diesem Falle einer der Streckenzüge (1) und hat die Länge $\overline{P'P''}$, ist also der kürzeste.

<u>Fall 2:</u> In diesem Fall enthält entweder P'P" den Punkt S' (wenn $4\varphi = 180^\circ$ ist) oder P'P" enthält keinen Punkt einer der Strecken S'B', S'C', S'D'. Ist daher P'Q'R'T'P" einer der zulässigen Streckenzüge (1), so liegen bei wenigstens einem der drei Streckenzüge P'Q'R', Q'R'T', R'T'P" nicht alle drei angegebenen Punkte auf derselben Geraden. Ersetzt man daher einen solchen Streckenzug durch die Verbindungsstrecke seiner Endpunkte, so hat diese eine kleinere Länge als der Streckenzug und liegt wegen $2\varphi < 180^\circ$ innerhalb des Sechsecks und bildet mit den restlichen beiden Strecken von P'Q'R'T'P" zusammen einen anderen zulässigen Streckenzug (1) von kleinerer Länge. Daher gibt es im Fall 2 keinen kürzesten unter den Streckenzügen (1).

Die gesuchte Menge der Winkelgrößen φ ist die Menge aller φ mit $0^\circ < \varphi < 45^\circ$.

1043B) <u>Lösung</u>: <u>7 Punkte</u>

Angenommen, Peters Aussage wäre falsch. Dann gälte: Peter hat den Zirkel nicht, und Klaus hat das Lineal. Hiernach wäre Uwes Aussagen falsch, und folglich auch Monikas Aussage, im Widerspruch zu der Mitteilung, daß genau zwei der Aussagen falsch sind.
Also ist Peters Aussage wahr. Wenn nun Peter den Zirkel nicht hat, so hat hiernach (wegen der Wahrheit von Peters Aussage) Klaus das Lineal nicht. Also ist Uwes Aussage wahr, und folglich auch Monikas Aussage. Somit sind die Aussagen von Klaus und Ilona falsch. Daraus folgt:

(1) <u>Klaus hat das Lineal</u>, (2) Uwe hat den Bleistift nicht, (3) Ilona hat den Füller nicht, (4) Ilona hat den Bleistift nicht.
Aus Peters wahrer Aussage folgt wegen (1):
(5) <u>Peter hat den Zirkel</u>. Daraus und aus (1), (2) und (4) folgt
(6) <u>Monika hat den Bleistift</u>. Aus den ermittelten Verstecken und aus (3) folgt
(7) <u>Ilona hat den Radiergummi</u> und damit
(8) Uwe hat den Füller. Die Verstecke konnten also eindeutig ermittelt werden. Sie sind in (1), (5), (6), (7) und (8) angegeben.

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

1044) **Lösung:** **6 Punkte**

Nach einem der Wurzelgesetze gilt:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{4-3} = 1 \text{ , also } \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Angenommen nun, eine rationale Zahl r erfülle die in der Aufgabe genannte Gleichung. Für die Zahl $z = (\sqrt{2+\sqrt{3}})^r$ ist dann $\frac{1}{z} = (\sqrt{2-\sqrt{3}})^r$, und folglich erfüllt z die Gleichung $z + \frac{1}{z} = 4$, woraus folgt, daß entweder $z = 2+\sqrt{3}$ oder $z = 2-\sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ gilt.

Aus $z = (\sqrt{2+\sqrt{3}})^r = 2+\sqrt{3}$ folgt nun $r = 2$; denn wäre $r < 2$, so wäre $z < 2+\sqrt{3}$, und wäre $r > 2$, so wäre $z > 2+\sqrt{3}$.
Aus $z = (\sqrt{2+\sqrt{3}})^r = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ folgt entsprechend $r = -2$.
Daher können nur die Zahlen $r = 2$ und $r = -2$ die genannte Gleichung erfüllen. Tatsächlich gilt:

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^2 = 2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3} = 4 \quad \text{sowie}$$

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{-2} + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^{-2} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3} =$$

Die gegebene Gleichung hat daher genau die Lösungen $r = 2$ und $r = -2$.

1045) **Lösung:** **6 Punkte**

Christa hat recht. Um dieses zu beweisen, genügt ein Beispiel für zwei Funktionen f und g, die alle eingangs genannten Voraussetzungen erfüllen und für die g weder streng monoton wachsend noch streng monoton fallend im gesamten Definitionsbereich ist. Ein solches Beispiel bilden etwa die durch $f(x) = x$ und $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ für

alle reellen x definierten Funktionen f und g; denn f wächst im gesamten Definitionsbereich streng monoton, und für alle x gilt $g(x)^2 - f(x)^2 = x^2 + 1 - x^2 = 1$.
Ferner ist z.B. $g(-1) = g(1)$. Daher ist g weder streng monoton wachsend noch streng monoton fallend im gesamten Definitionsbereich.

1046) **Lösung:** 8 Punkte

a) I. Angenommen, eine Zuordnung zwischen A, B, C und D, E, F habe die geforderte Eigenschaft. Wir bezeichnen dabei jetzt mit A', B', C' den A, B bzw. C zugeordneten Punkt. Da AB Kante sein soll, muß AB mindestens zwei Seitenflächen angehören. Nach Voraussetzung gehen von A nur die Kanten AB, AC, AA' und von B nur die Kanten BA, BC, BB' aus. Folglich müssen AA' und BB' in einer gemeinsamen Ebene liegen, in der mithin auch AB und A'B' liegen.
Wir beachten jetzt, daß EF und AB in einer gemeinsamen Ebene ε liegen. [Der Mittelpunkt des Würfels liegt nämlich aus Symmetriegründen sowohl auf AE als auch auf BF, so daß AE und BF in einer gemeinsamen Ebene ε liegen.] . Die Ebene ε enthält D nicht [weil die Ebene durch D, E, F nicht A, B, C enthält] . Daher kann weder DE noch DF mit AB in einer gemeinsamen Ebene liegen. Es muß also A'B' = EF (d.h. entweder A' = E und B' = F oder A' = F und B' = E) und aus Symmetriegründen B'C' = FD und C'A' = DE sein. Daraus folgt, daß A' = E, B' = F, C' = D sein muß.

Anmerkung: Die Begründungen in [ ] können evtl. auch wegbleiben, da die Behauptungen wegen anschaulicher Richtigkeit vom Schüler evtl. als keines Beweises bedürftig behandelt werden.

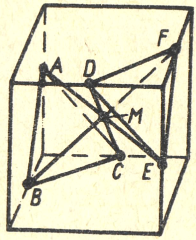


Abb. L 1046

II. Umgekehrt hat in der Tat diese Zuordnung die geforderte Eigenschaft, daß die Strecken AE, BF, CD, AB, BC, CA, DE, EF, FD die sämtlichen Kanten einer aus Polyedern zusammensetzbaren Figur sind.
Der Mittelpunkt M von AE ist nämlich aus Symmetriegründen zugleich der von BF, der von CD sowie der des Würfels.
Daher besteht die gesuchte Figur aus den beiden Tetraedern ABCM und DEFM.

b) Die Strecken AB, BC, CA, DE, EF, FD haben sämtlich die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$. Wegen $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CD} = a\sqrt{2}$ haben auch AM, BM, CM, DM, EM, FM die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$. Daher sind die beiden Tetraeder regelmäßig, zueinander kongruent und haben nach einer bekannten Formel das Volumen

$$\frac{1}{12}\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^3 \cdot\sqrt{2} = \frac{a^3}{24} .$$

Die gesamte Figur hat das Volumen $\frac{a^3}{12}$.