XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1031) In

$$\begin{array}{r} \text{ARZT} \\ +\ \text{ARZT} \\ \hline \text{ÄRZTE} \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für die gleichen Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden. Geben Sie alle Lösungen dafür an! (A und Ä gelten als verschiedene Buchstaben)

1032) Beweisen Sie folgenden Satz:

Ist ABCD ein (konvexes) Drachenviereck mit $\overline{AB} = \overline{AD} = a$, $\overline{BC} = \overline{DC} = b$ und dem Inkreismittelpunkt M, dann gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{BM}}{\overline{CM} \cdot \overline{DM}}.$$

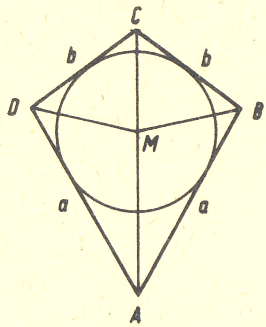

Abb. A 1032

1033) Gegeben sei eine positive reelle Zahl a, für die $a \neq 1$ gilt. Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung

$$x^{\log_a x} = a^2 x$$

erfüllen.

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1034) Es seien a, b gegebene positive reelle Zahlen, und es sei f die für alle natürlichen Zahlen n durch die Gleichung

$f(n) = a^n + b^n + (a + b)^n$ definierte Funktion.

Beweisen Sie, daß dann $(f(2))^2 = 2 \cdot f(4)$ gilt!

1035) Man gebe alle natürlichen Zahlen n mit $n < 40$ an, für die die Zahl

$$n^2 + 6n - 187$$

ohne Rest durch 19 teilbar ist.

1036) Gegeben sei ein Parallelogramm OPQR. Gesucht sind alle Punkte X auf der Verlängerung von OP über P hinaus, die folgende Eigenschaft haben: Schneidet die Parallele durch Q zu XR die Verlängerung von OR über R hinaus in Y, so gilt $PY \parallel XQ$. Man untersuche, ob derartige Punkte X existieren. Ist dies der Fall, so beschreibe und begründe man eine Konstruktion aller derartigen Punkte und untersuche, ob es nur einen solchen Punkt X gibt.

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

<u>Achtung</u>: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1031) <u>Lösung</u>: <u>7 Punkte</u>

Angenommen, es gibt eine Lösung, dann muß $Ä = 1$ sein, da die fünfstellige Summe zweier vierstelliger Zahlen kleiner als 20 000 ist.
Sei die aus den drei Ziffern R, Z und T gebildete (möglicherweise mit 0 beginnende) dreistellige Zahl mit x bezeichnet, so muß gelten:

$$2\,(1000\,A + x) = 10\,000 + 10x + E, \quad \text{also}$$
$$2000\,A + 2x - 10\,000 - 10x = E \quad \text{und damit}$$
$$8\,(250\,A - 1250 - x) = E, \quad \text{also} \quad 8 \mid E.$$

Da E eine einstellige natürliche Zahl ist, kommen nur $E = 0$ oder $E = 8$ in Frage.
Für $E = 0$ folgt sofort

$$250\,A - 1250 = x, \quad \text{also}$$
$$10(25\,A - 125) = x \quad \text{und somit} \quad 10 \mid x.$$

Das aber ist nur möglich für $T = 0$, was auf den Widerspruch $T = E$ führen würde.
Also ist eine Lösung nur möglich für $E = 8$.
In diesem Falle erhält man

$$250\,A - 1250 - x = 1$$
$$250\,(A - 5) = x + 1$$
$$A = 5 + \frac{x+1}{250}$$

Da A eine einstellige natürliche Zahl ist, folgt, daß der Quotient $\frac{x+1}{250}$ (> 0) eine natürliche Zahl kleiner als 5 sein muß.

Ist er 1, 2, 3 bzw. 4, so ergibt sich jeweils

$x = 249,$

$x = 499,$

$x = 749$ bzw.

$x = 999$.

Da nach den Bedingungen der Aufgabe x aus drei verschiedenen Ziffern bestehen muß, kommen höchstens 749 und 249 in Frage. Für $x = 749$ erhält man $A = 8$, was im Widerspruch zu $E = 8$ steht.
Für $x = 249$ erhält man $A = 6$. Die somit als einzige verbliebene Möglichkeit

$Ä = 1$, $E = 8$, $R = 2$, $Z = 4$, $T = 9$, $A = 6$

erfüllt alle Bedingungen der Aufgabe, da diese Ziffern sämtlich verschieden sind und da

$$\begin{array}{r} 6249 \\ +\ 6249 \\ \hline =\ 12498 \end{array}$$ gilt.

Hinweis: Sollte die Lösung durch systematisches Probieren gefunden worden sein, so ist nur dann volle Punktzahl zu geben, wenn die Lösung mit ausreichendem Text versehen ist. Insbesondere muß nachgewiesen worden sein, daß es genau eine Lösung gibt.

1032) Lösung: 7 Punkte

Wegen $\overline{AB} = \overline{AD}$ und $\overline{BC} = \overline{DC}$ ist ABCD symmetrisch zu AC, so daß $\overline{BM} = \overline{DM}$ ausfällt.
Daher ist die zu beweisende Behauptung mit

$$\frac{a}{b} = \frac{\overline{AM}}{\overline{CM}}$$

äquivalent.

Bezeichnen nun r den Inkreisradius und im Dreieck ABC h die Länge der Höhe auf die Gerade durch A und C sowie $I(\triangle XYZ)$ den Flächeninhalt des Dreiecks XYZ, so gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2}\,a\,r}{\frac{1}{2}\,b\,r} = \frac{I(\triangle AMB)}{I(\triangle CMB)} = \frac{\frac{1}{2}\,h\cdot\overline{AM}}{\frac{1}{2}\,h\cdot\overline{CM}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{CM}},$$ w.z.b.w..

1033) <u>Lösung:</u> 6 Punkte

Angenommen, es gibt eine reelle Zahl x, die die gegebene Gleichung erfüllt. Dann ist $x > 0$, da $\log_a x$ existiert, und es folgt, wenn man die Gleichung logarithmiert,

$$\log_a x \cdot \log_a x = \log_a a^2 x$$

und somit $(\log_a x)^2 = \log_a a^2 + \log_a x$.

Setzt man $\log_a x = z$, so ergibt sich die quadratische Gleichung

$$z^2 - z - 2 = 0,$$

die genau die beiden Lösungen $z = 2$ und $z = -1$ hat.

Aus $\log_a x = z = 2$ erhält man $x = a^2$, und aus

$\log_a x = z = -1$ erhält man $x = \frac{1}{a}$.

Also kann nur $x = a^2$ oder $x = \frac{1}{a}$ Lösung der gegebenen Gleichung sein.

Die Proben $\quad (a^2)^{\log_a a^2} = (a^2)^2 = a^4 = a^2 \cdot a^2$

bzw. $\quad (\frac{1}{a})^{\log_a \frac{1}{a}} = (\frac{1}{a})^{-1} = a = a^2 \cdot \frac{1}{a}$

bestätigen, daß diese beiden Zahlen tatsächlich Lösungen sind.

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 – 2. Tag –

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1034) **Lösung:** **6 Punkte**

Laut Definition von f gilt

$$(f(2))^2 = (a^2 + b^2 + (a+b)^2)^2 = (2a^2 + 2ab + 2b^2)^2 =$$
$$= 4(a^4 + 2a^3b + 2a^2b^2 + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4) =$$
$$= 2(a^4 + b^4 + a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4) =$$
$$= 2(a^4 + b^4 + (a+b)^4) = 2\,f(4),$$ w.z.b.w..

1035) **Lösung:** **6 Punkte**

Angenommen, n sei eine Zahl mit den verlangten Eigenschaften. Dann muß wegen $n^2 + 6n - 187 = (n - 11)(n + 17)$ mindestens einer dieser beiden Faktoren durch 19 teilbar sein, da 19 eine Primzahl ist.

Fall 1: Es gelte $n - 11 = m \cdot 19$ mit ganzzahligem m.

Daraus folgt $n = 19m + 11$.

Für $m < 0$ ist n keine natürliche Zahl.

Aus $m = 0$ folgt $n = 11$.

Aus $m = 1$ folgt $n = 30$.

Für $m \geqq 2$ ist $n > 40$.

Fall 2: Es gelte $n + 17 = r \cdot 19$ mit ganzzahligem r.

Daraus folgt $n = 19r - 17$.

Für $r \leqq 0$ ist n keine natürliche Zahl.

Aus $r = 1$ folgt $n = 2$.

Aus $r = 2$ folgt $n = 21$.

Für $r \geqq 3$ ist $n \geqq 40$.

Also können höchstens die Zahlen 11, 30, 2, 21 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Tatsächlich gilt:

$11^2 + 6 \cdot 11 - 187 = 11\ (11 + 6 - 17) = 0 \cdot 19$

$30^2 + 6 \cdot 30 - 187 = 30 \cdot 36 - 187 = 893 = 47 \cdot 19$

$2^2 + 6 \cdot 2 - 187 = 16 - 187 = -9 \cdot 19$

$21^2 + 6 \cdot 21 - 187 = 21 \cdot 27 - 187 = 380 = 20 \cdot 19$

Genau die Zahlen 11, 30, 2, 21 genügen daher den Bedingungen der Aufgabe.

2. Lösungsweg:

Genau dann ist $(n^2 + 6n - 187) = (n + 3)^2 - 196$ durch 19 teilbar, wenn $(n + 3)^2$ bei Division durch 19 den Rest 6 läßt. (Es ist also die Kongruenz $(n + 3)^2 \equiv 6 \pmod{19}$ zu lösen.) Läßt nun $n + 3$ bei Division durch 19 den Rest r, so läßt $(n + 3)^2$ jeweils den in der folgenden Tabelle unter r^2 genannten Rest.

r	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9
r^2	0	1	4	9	16	6	17	11	7	5

Daher ist genau dann $n^2 + 6n - 187$ durch 19 teilbar, wenn $n + 3$ einen der Reste 5, −5 oder, gleichwertig hiermit, n einen der Reste 2, 11 läßt. Unter den natürlichen Zahlen n mit $n < 40$ trifft dies genau für die Zahlen 2, 11, 21, 30 zu.

Daher genügen genau diese Zahle_ den Bedingungen der Aufgabe.

1036) Lösung: 8 Punkte

(I) Angenommen, X sei ein Punkt der geforderten Art. Dann gilt, wenn $\overline{OP} = a$, $\overline{OR} = b$, $\overline{PX} = x$, $\overline{RY} = y$ gesetzt wird:

(1) $\frac{y}{a} = \frac{b}{a + b}$;

denn wegen $\sphericalangle ROP \cong \sphericalangle YRQ$ und $\sphericalangle ORX \cong \sphericalangle RYQ$

ist $\triangle ORX \sim \triangle RYQ$.

Außerdem gilt

(2) $\frac{x}{b} = \frac{a}{b + y}$,

weil wegen $\sphericalangle OPY \cong \sphericalangle OXQ$ und $\sphericalangle OYP \cong \sphericalangle PQX$

$\triangle OYP \sim \triangle PQX$ gilt.

Aus (1) und (2) folgt

(3) $\frac{x}{b} = \frac{a}{b + \frac{ab}{a+x}}$,

(4) $x^2 + ax - a^2 = 0$

und hieraus wegen $x > 0$

$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Ist nun $\triangle OMP$ ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten OP und $\overline{OM} = \frac{a}{2}$, N der Schnittpunkt von MP mit dem Kreis um M mit dem Radius $\frac{a}{2}$, X der nicht auf OP gelegene Schnittpunkt des Kreises um P mit dem Radius $\overline{PN}$, so ist $\overline{PX} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Daher genügt der Punkt X nur dann allen Forderungen der Aufgabe, wenn er auf folgende Weise konstruiert werden kann:

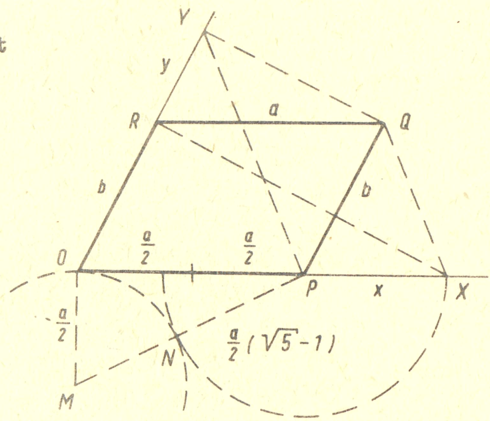

Abb. L 1036

(II) (α) Man errichtet auf OP in O die Senkrechte s.

(β) Man trägt von O aus auf s eine Strecke OM der Länge $\frac{a}{2}$ ab.

(γ) Man schlägt den Kreis k um M mit dem Radius $\overline{MO}$. Ist N der Schnittpunkt von k mit PM, dann

(δ) schlage man den Kreis k' um P mit dem Radius $\overline{PN}$. Der nicht auf OP liegende Schnittpunkt von k' mit der Geraden durch O und P ist der Punkt X.

(III) Jeder so konstruierte Punkt X genügt den Bedingungen der Aufgabe.

<u>Beweis</u>: Nach dem Lehrsatz von Pythagoras gilt

$$\overline{MP} = \sqrt{\overline{OM}^2 + \overline{OP}^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}\,.$$

Daher ist nach Konstruktion

$$\overline{PX} = \overline{PN} = \overline{PM} - \overline{MN} = \overline{PM} - \overline{MO} = \frac{a}{2}\,(\sqrt{5} - 1)$$

Folglich gilt $x = \overline{PX} = \frac{a}{2}\,(\sqrt{5} - 1)$ und damit (4) und (3). Ist nun Y außerhalb von OP auf der OR enthaltenden Geraden so gelegen, daß YQ $\parallel$ RX ist, so gilt

$\triangle OYP \quad \triangle PQX$

und hieraus $\sphericalangle OPY \cong \sphericalangle PXQ$. Folglich ist

$\overline{\sphericalangle PXQ} + \overline{\sphericalangle YPX} = 180^\circ$.

Daher können die PY bzw. XQ enthaltenden Geraden nach dem Winkelsummensatz für Dreiecke keinen Schnittpunkt haben, sind also parallel.

(IV) Die angegebene Konstruktion ist stets auf genau zwei Weisen ausführbar, die beide auf denselben Punkt X führen.