kulandt

L 10 XIV Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1021) **Lösung:** **10 Punkte**

Die Zahl z_1 ist vierstellig, da sonst wegen $z_1 > z_2$ die Summe $z_1 + z_2 < 2000$ wäre.
Bezeichnet man die erste der benutzten Ziffern mit a und die zweite mit b, so gilt a = 1 oder a = 2. Die Zahl z_1 hat hiermit die Form abab, z_2 ist entweder

(1) vierstellig, dann hat sie die Form abab oder
(2) dreistellig, dann hat sie die Form aba oder
(3) zweistellig, dann hat sie die Form ab oder
(4) einstellig, dann hat sie die Form a.

Im Falle (1) und (3) stehen an den Einerstellen beider Zahlen gleiche Ziffern, folglich wäre ihre Summe eine gerade Zahl, im Widerspruch dazu, daß 2555 ungerade ist.

Im Falle (4) wäre a = 2, was auf b = 3 führen würde. Da aber $2323 + 2 = 2325 \neq 2555$ ist, ist auch dieser Fall nicht möglich.

Im Falle (2) muß a = 2 sein. Daraus erhält man b = 3. Tatsächlich erfüllen diese Angaben alle Bedingungen der Aufgabe; denn es ist 2323 + 232 = 2555.
Die beiden Ziffern lauten 2 und 3, und es ist $z_1 = 2323$ und $z_2 = 232$.

1022) **Lösung:** **10 Punkte**

Angenommen, (x, y, z) sei ein Tripel mit den verlangten Eigenschaften.
Aus (1) und (2) folgt dann
(4) $x > y > z$. Nach (3) gilt $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$, wobei a, b, c natürliche Zahlen sind.

Aus (4) folgt dann (5) $a > b > c$.
Wegen (1) und (2) gilt schließlich
$a^2 - b^2 = 96$ sowie $b^2 - c^2 = 96$ und damit
$(a + b)(a - b) = (b + c)(b - c) = 96$.

Hieraus ergibt sich unter Berücksichtigung von (4), daß höchstens die folgenden Möglichkeiten bestehen:

$a + b$ bzw. $b + c$	96	48	32	24	16	12
$a - b$ bzw. $b - c$	1	2	3	4	6	8

Hiervon scheiden die Fälle mit ungeraden $(a+b)+(a-b) = 2a$ aus, und in den übrigen Fällen folgt

(a,b) bzw. (a,c)	(25,23)	(14,10)	(11,5)	(10,2)

Die einzige Zahl, die sowohl erste als auch zweite Zahl in je einem dieser Paare ist, ist 10. Damit verbleibt nur die Möglichkeit $a = 14$, $b = 10$, $c = 2$.

Das führt auf $x = 196$, $y = 100$, $z = 4$.
Umgekehrt hat das Tripel (x, y, z) aus diesen Zahlen die verlangten Eigenschaften; denn es ist
$196 - 100 = 100 - 4 = 96$.
Das Tripel (196, 100, 4) ist daher die einzige Lösung der Aufgabe.

1023) Lösung: 10 Punkte

Wegen $\sphericalangle AED = 90^\circ$ und $\sphericalangle ACD = 90^\circ$ liegen E und C nach der Umkehrung des Lehrsatzes von Thales auf dem Kreis mit dem Durchmesser AD. Daher ist nach dem Peripheriewinkelsatz $\sphericalangle CDE$ entweder gleich $\sphericalangle CAE$ ($< 90^\circ$) oder gleich $180^\circ - \sphericalangle CAE$ ($> 90^\circ$). Der zweite Fall kann nicht eintreten, weil mit B auch AB und insbesondere E als Punkt von AB auf der anderen Seite der Geraden durch A und C liegt wie D und daher $\sphericalangle ECD > 90^\circ$, also $\sphericalangle CDE < 90^\circ$ ausfällt.

Es sei jetzt R der Punkt auf DE, für den

$\overline{DR} = \overline{AB}$ (1)

gilt (wegen $\overline{AB} < \overline{AC} = \overline{DC} < \overline{DE}$ existiert tatsächlich genau ein solcher Punkt R).

Dann ist $\triangle DRC \cong \triangle ABC$ (nach sws).

Folglich ist $\overline{\sphericalangle DRC} = 90^\circ$ und somit $\overline{\sphericalangle ERC} = 90^\circ$. Daher ist BERC ein Rechteck, so daß

$\overline{RE} = \overline{BC}$ (2)

ist. Aus (1) und 2) folgt (da R auf DE liegt) durch Addition die zu beweisende Behauptung.

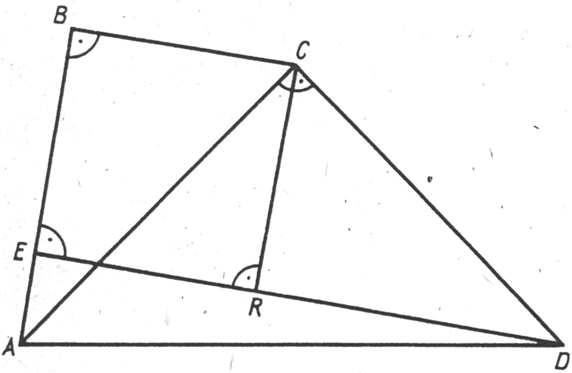

Abb. L 1023

1024) Lösung: 10 Punkte

a) Nach dem Satz des Thales ist das Dreieck ABD rechtwinklig mit D als Scheitel des rechten Winkels. Daher gilt:

$\overline{AD} = \sqrt{4r^2 - x^2}$ und somit für das Volumen der Pyramide

$V = \frac{1}{6} xh \sqrt{4r^2 - x^2}$.

b) Wegen $AC \perp \varepsilon$ ist $AC \perp BD$, ferner gilt $AD \perp BD$.

Daher steht die Ebene durch A, C, D senkrecht auf BD, woraus die Behauptung $CD \perp BD$ folgt.

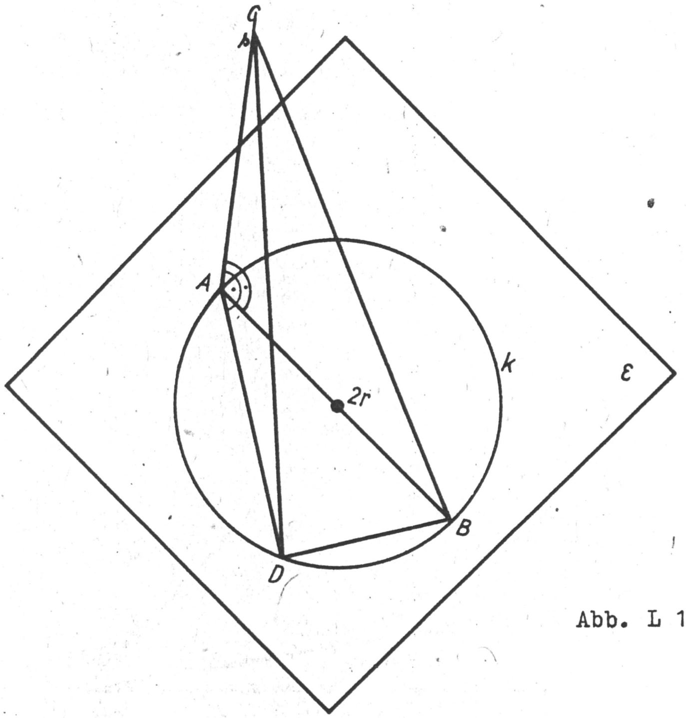

Abb. L 1024

Anderer Beweis für b):
Nach Voraussetzung ist $AC \perp AD$. Daher gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$\overline{CD}^2 = 4r^2 - x^2 + h^2$$

und wegen $AC \perp AB$

$$\overline{BC}^2 = 4r^2 + h^2$$
$$= \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2$$

Daher ist nach der Umkehrung des Lehrsatzes von Pythagoras $\sphericalangle$ CDB ein rechter Winkel, w.z.b.w..