Umlauf

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

931) **Lösung:** **6 Punkte**

Genau dann ist x die gesuchte Zahl, wenn x die kleinste natürliche Zahl ist, zu der eine natürliche Zahl $n \geqq 2$ mit $83x = 3 \cdot 10^n + 10x + 8$ oder, äquivalent hierzu, mit $73x = 3 \cdot 10^n + 8$ existiert.

Untersucht man die Zahlen 308, 3 008, 30 008, 300 008, 3 000 008 der Reihe nach auf Teilbarkeit durch 73, so ergibt sich, daß von ihnen nur die Zahl 3 000 008 = 73 · 41 096 teilbar ist. Daher ist x = 41 096 die gesuchte Zahl, und es gilt 83 · 41 096 = 3 410 968.

932) **Lösung:** **7 Punkte**

Genau dann ist (a_1, a_2, a_3, a_4) ein derartiges Quadrupel, wenn es eine ganze Zahl n mit $a_1 = n$, $a_2 = n + 1$, $a_3 = n + 2$, $a_4 = n + 3$ gibt, für die

(1) $n^3 + (n + 1)^3 = (n + 3)^3 - (n + 2)^3$ gilt.

Gleichung (1) ist äquivalent mit

$$n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = n^3 + 9n^2 + 27n + 27 - (n^3 + 6n^2 + 12n + 8)$$

und dies mit $n^3 - 6n = 9$, d. h. mit

(2) $n(n^2 - 6) = 9$.

Da für ganzzahliges n die beiden Faktoren des linken Terms der Gleichung (2) ganze Zahlen sind, kann (2) nur erfüllt sein, wenn n eine der Zahlen 1, -1, 3, -3, 9, -9 ist.

L 9; I

Wie die folgende Tabelle zeigt, erfüllt von diesen Zahlen genau die Zahl n = 3 die Gleichung (2) und damit die Gleichung (1).

n	n^2	(n^2-6)	$n \cdot (n^2-6)$
1	1	-5	-5
-1	1	-5	5
3	9	3	9
-3	9	3	-9
9	81	75	675
-9	84	75	-675

Damit erfüllt das Quadrupel (3, 4, 5, 6) als einziges alle Bedingungen der Aufgabe.

933) <u>Lösung</u>: <u>7 Punkte</u>

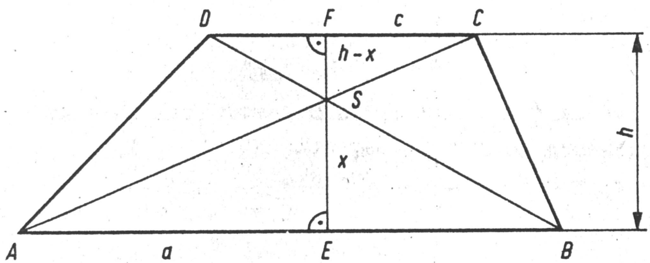

Abb. L 933

Es seien E der Fußpunkt des Lotes von S auf die Gerade durch A und B sowie F der des Lotes von S auf die Gerade durch C und D. Dann gilt $\overline{EF} = h$. Setzt man $\overline{ES} = x$, so folgt $\overline{FS} = h - x$.

Nun gilt nach einem Teil des Strahlensatzes:

$x : (h - x) = \overline{SA} : \overline{SC} = a : c$, also $cx = ah - ax$, woraus man

$x = \frac{a\,h}{a+c}$ (1) sowie $h - x = \frac{c\,h}{a+c}$ (2) erhält.

Folglich gilt:

$F_1 = \frac{1}{2}\,ax = \frac{a^2\,h}{2(a+c)}$ sowie $F_3 = \frac{1}{2}\,c\,(h - x) = \frac{c^2\,h}{2(a+c)}$.

L 9; I

Die Dreiecke ABC und ABD haben den gleichen Flächeninhalt, da sie in einer Seite und der zugehörigen Höhenlänge übereinstimmen. Für ihren Flächeninhalt F gilt: $F = \frac{1}{2} a \cdot h$.

Hiernach gilt für die Flächeninhalte F_2 bzw. F_4:

$$F_2 = F_4 = F - F_1 = \frac{1}{2} a h - \frac{a^2 h}{2(a+c)} = \frac{a^2 h + ahc - a^2 h}{2(a+c)} = \frac{a h c}{2(a+c)}.$$

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

934) **Lösung:** **6 Punkte**

Wegen $(x - y)^2 \geqq 0$ gilt $x^2 + y^2 \geqq 2xy$, wobei Gleichheit genau für $x = y$ gilt, und entsprechend

$$x^2 + z^2 \geqq 2xz,$$ wobei Gleichheit genau für $x = z$ gilt, sowie

$$y^2 + z^2 \geqq 2yz,$$ wobei Gleichheit genau für $y = z$ gilt. Durch Addition und Division mit 2 folgt:

Es gilt stets $$x^2 + y^2 + z^2 \geqq xy + xz + yz,$$

und darin das Gleichheitszeichen genau dann, wenn

$$x = y = z$$ gilt.

935) **Lösung:** **8 Punkte** **a) 3 Punkte** **b) 5 Punkte**

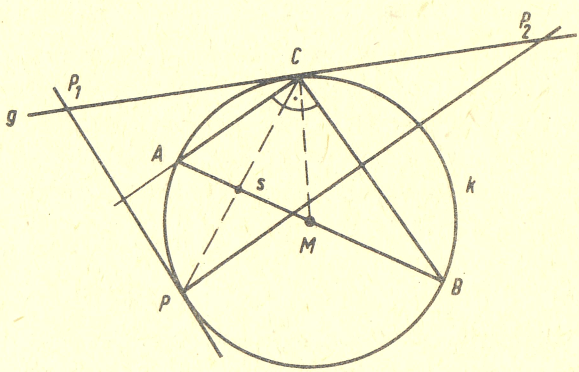

Abb. L 935

a) Es gilt $\sphericalangle ACP_1 \cong \sphericalangle ACP$ und $\sphericalangle BCP_2 \cong \sphericalangle BCP$,
da der jeweils zuerst genannte Winkel Bild des anderen Winkels bei einer Spiegelung an der Geraden durch A und C bzw. an der durch B und C ist. Da die Winkel $\sphericalangle ACP$ und $\sphericalangle BCP$ zusammen einen rechten Winkel ergeben, bilden alle vier genannten Winkel zusammen einen gestreckten.
Also gilt: $\overline{\sphericalangle P_1CP_2} = 180^\circ$, d. h., C liegt auf der Geraden g durch P_1 und P_2.

b) Aus a) folgt: Genau dann ist g die Tangente t in C an k, wenn P_1 auf t liegt. Dies ist genau dann der Fall, wenn P auf dem Spiegelbild s von t bei Spiegelung an der Geraden durch A und C liegt. Somit ist b) bewiesen, wenn man nachweist, daß $s \perp AB$ gilt. Dies kann folgendermaßen geschehen:

Der Winkel, den t mit AC bildet, ergänzt den Winkel $\sphericalangle BAC$ zu 90° (dann ist M der Mittelpunkt von AB, also von k, so ergänzt der Winkel zwischen t und AC den Winkel $\sphericalangle ACM$ zu 90°, und da $\triangle ACM$ gleichschenklig ist, gilt $\overline{\sphericalangle ACM} = \overline{\sphericalangle BAC}$). Also ergänzt auch der Winkel, den s mit AC bildet, $\sphericalangle BAC$ zu 90°. Daher gilt $s \perp AB$.

(Hinweis zur Korrektur: Zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe sind eigentlich noch mehrere Lagediskussionen darüber erforderlich, in welche Halbebene ein Schenkel jeweils betrachteter Winkel hinweist. Im Rahmen dieser Olympiadeaufgabe kann auf derartige Diskussionen verzichtet werden.)

936) <u>Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Die Grundfläche der betrachteten Pyramide ist die des gleichseitigen Dreiecks KLM. Es hat die Seitenlänge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ (Pythagoras). Folglich beträgt sein Flächeninhalt (laut Tafel) $\frac{a^2}{8}\sqrt{3}$.

L 9; II

Es sei N der Mittelpunkt von LM. Dann liegen die Punkte K, N so auf dem Rechteck ACGE, wie es Abb. L 936 zeigt; und zwar ist $\overline{GK} = \frac{a}{2}$ und $\overline{GN} = \frac{a}{4}\sqrt{2}$ (als halbe Länge der Hypotenuse des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks MGL mit $\overline{GM} = \overline{GL} = \frac{a}{2}$.

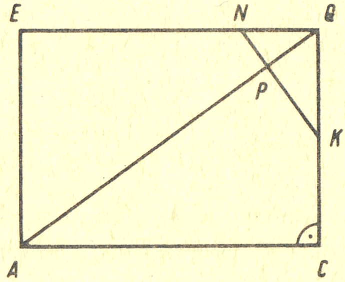

Abb. L 936

Daraus folgt:

$\overline{NK} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8}} = \frac{a}{4}\sqrt{6}$ und weiter (da $\triangle GPK \sim \triangle NGK$ ist)

$\overline{GP} : \overline{GN} = \overline{NG} : \overline{NK}$, also

$\overline{GP} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{2} : \frac{a}{4}\sqrt{6} = \frac{a}{6}\sqrt{3}$, also

$\overline{AP} = \overline{AG} - \overline{GP} = \frac{5}{6}\, a\sqrt{3}$.

Weiter gilt wegen $\overline{GN} : \overline{GK} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \overline{GC} : \overline{CA}$

$\triangle ACG \sim \triangle KGN$ und daher $\triangle ACG \sim \triangle GPK$,

so daß für den Schnittpunkt P von AG mit NK

$\overline{\sphericalangle GPK} = \overline{\sphericalangle ACG} = 90^\circ$ ausfällt.

Aus Symmetriegründen gilt auch

$\overline{\sphericalangle GPL} = 90^\circ$.

Daher steht GP auf der Ebene durch L, M, N senkrecht, so daß AP Höhe der Pyramide AKLM ist.

Mithin erhält man für das Volumen V der Pyramide mit den Eckpunkten A, K, L, M den Wert

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6}\, a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2}{8}\sqrt{3} = \frac{5}{48}\, a^3$.