XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

931) Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl x (wobei x nicht unbedingt einstellig sein soll), die folgende Eigenschaften hat: Die Zahl $83 \cdot x$ (das Produkt aus 83 und x) hat als Darstellung die Ziffernfolge 3 x 8 (d. h. vor die Ziffer oder Ziffernfolge der Zahl x ist eine 3, hinter die so gebildete Ziffernfolge eine 8 zu setzen).

932) Man gebe alle geordneten Quadrupel (a_1, a_2, a_3, a_4) aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4 mit $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ an, die folgender Bedingung genügen:

Potenzen Die Summe der dritten Potenz der ersten beiden Zahlen des Quadrupels ist gleich der Differenz der dritten Potenz der letzten und vorletzten Zahl des Quadrupels.

933) Von einem beliebigen Trapez ABCD mit $AB \parallel CD$ seien die Längen $a = \overline{AB}$, $c = \overline{CD}$ seiner Parallelseiten sowie der Abstand h der diese Parallelseiten enthaltenden Geraden gegeben.

Der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD sei S.

Man berechne aus den gegebenen Längen a, c, h die Flächeninhalte F_1, F_2, F_3, F_4 der Dreiecke ABS, BCS, CDS bzw. ADS.

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

934) Man beweise, daß für beliebige reelle Zahlen x, y, z die folgende Beziehung gilt:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq xy + xz + yz.$$

Ferner gebe man für x, y, z Bedingungen an, die gleichwertig damit sind, daß in der genannten Beziehung das Gleichheitszeichen gilt.

935) Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C. Auf dem Umkreis k des Dreiecks liege auf dem Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$, der C nicht enthält, ein von A und B verschiedener Punkt P. Symmetrisch zu P bezüglich der Geraden durch A und C bzw. der durch B und C mögen die Punkte P_1 und P_2 liegen.

a) Man beweise, daß C auf der Geraden g durch P_1 und P_2 liegt.
b) Man beweise, daß g genau dann die Tangente im Punkt C an den Umkreis k ist, wenn $CP \perp AB$ gilt.

936) In einem Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (s. Abb. A 936) und der Kantenlänge a seien K, L, M die Mittelpunkte der Seiten CG, FG bzw. HG.
Man ermittle das Volumen der Pyramide mit den Eckpunkten A, K, L, M.

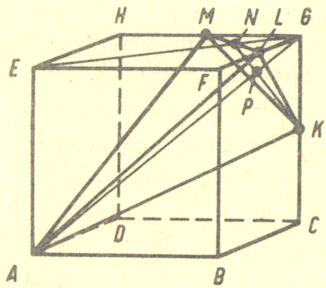

Abb. A 936