XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

831) Um Peters Fähigkeiten im Knobeln zu erproben, werden ihm an einem Zirkelnachmittag über fünf Schüler sieben Aussagen mitgeteilt, unter denen, wie ihm ebenfalls gesagt wird, genau eine falsch ist. Er soll diese falsche Aussage herausfinden und außerdem die Schüler dem Alter nach ordnen.

Die Aussagen lauten:
(1) Anton ist älter als Elvira.
(2) Berta ist jünger als Christine.
(3) Dieter ist jünger als Anton.
(4) Elvira ist älter als Christine.
(5) Anton ist jünger als Christine.
(6) Elvira ist älter als Dieter.
(7) Christine ist jünger als Dieter.

Ermittle die falsche Aussage und ordne die Schüler dem Alter nach! Beginne mit dem jüngsten!

832) Von zwei Primzahlen wird folgendes gefordert:

(a) Ihre Summe ist eine Primzahl.

(b) Multipliziert man diese Summe mit dem Produkt der zuerst genannten beiden Primzahlen, so erhält man eine durch 10 teilbare Zahl.

Man gebe alle Primzahlen an, die diese Forderungen erfüllen.

A 8; I

833) Gegeben sei ein Kreissektor mit dem Radius $\overline{SP} = \overline{SR} = 8{,}5$ cm und dem Zentriwinkel $\sphericalangle$ PSR der Größe 55° (s. Abb. A 833).

Konstruiere einen Kreis k, der dem gegebenen Sektor einbeschrieben ist, d. h., der die Strecken SP, SR und den Bogen PR so berührt, daß k innerhalb der Fläche des PR enthaltenden Kreises liegt!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

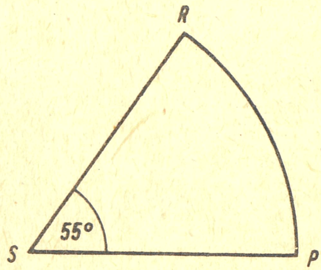

Abb. A 833

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

<u>Achtung</u>: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

834) Achim, Bernd, Christian und Detlef waren die vier Teilnehmer der Endrunde eines Schachturniers. Es hatte jeder gegen jeden genau zweimal zu spielen. Für jede gewonnene Partie wurden 1 Punkt, für jede unentschiedene ein halber Punkt, für jede verlorene 0 Punkte vergeben.

Ein Wandzeitungsartikel über dieses Turnier enthält folgende Angaben:

Bernd und Christian erzielten zusammen genau einen Punkt mehr als Achim und Detlef zusammen.

Christian und Detlef erzielten zusammen genau 7 Punkte.
Achim und Christian konnten zusammen genau 5 Punkte weniger erreichen als Bernd und Detlef zusammen.

Es wird gefragt, wieviele Punkte jeder der vier Teilnehmer erhielt?

Ermittle auf diese Fragen alle Antworten, die den genannten Angaben entsprechen!

835) Beweise folgenden Satz:

Verbindet man die Mittelpunkte der Diagonalen eines Trapezes, so erhält man eine (evtl. zu einem Punkt ausgeartete) Strecke, deren Länge halb so groß ist wie die Differenz der Längen der beiden parallelen Seiten.

836) Gegeben seien drei Zahlen p, p_1, p_2 mit $0 < p_1 < p < p_2 < 100$. Aus einer geeigneten Menge x kg einer p_1-prozentigen Lösung eines Stoffes (d. h. einer Lösung, die p_1 % dieses Stoffes und den Rest Wasser enthält) und einer geeigneten Menge y kg einer p_2-prozentigen Lösung des gleichen Stoffs soll durch Zusammengießen eine p-prozentige Lösung hergestellt werden.

a) Ermittle das hierzu erforderliche Mischungsverhältnis, d. h. die Zahl x : y, zunächst speziell für die Werte $p_1 = 25$, $p_2 = 60$ und $p = 35$!

b) Stelle dann eine für beliebige Werte von p_1, p_2 und p gültige Formel für das Mischungsverhältnis auf!

Anmerkung: Die angegebenen Prozentsätze beziehen sich auf die Masse, sind also nicht als Volumenprozent anzusehen.

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

831) <u>Lösung:</u> <u>5 Punkte</u>

Das Alter eines jeden Schülers sei mit dem Anfangsbuchstaben seines Vornamens bezeichnet.

Angenommen, (5) wäre wahr. Dann folgte erstens, daß (1) und (4) nicht beide wahr sein könnten; zweitens folgte auch, daß (7) und (3) nicht beide wahr sein könnten. Es gäbe also unter den Aussagen (1) bis (7) mehr als eine falsche. Damit ist die Annahme, (5) wäre wahr, widerlegt; d. h. (5) ist die falsche Aussage, und (1), (2), (3), (4), (6) und (7) sind wahr. Aus (2) folgt $B < C$, aus (7) folgt $C < D$, aus (6) folgt $D < E$, aus (1) folgt $E < A$.

Die verlangte Reihenfolge der Schüler lautet mithin: Berta, Christine, Dieter, Elvira, Anton.

832) <u>Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Angenommen, zwei Primzahlen P_1, P_2 haben die verlangten Eigenschaften. Eine der Primzahlen P_1 und P_2 muß wegen (a) 2 sein, da die Summe ungerader Primzahlen stets größer als 2 und durch 2 teilbar ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $P_1 = 2$. Wegen (b) gibt es eine natürliche Zahl n, so daß

$$(2 + P_2) \cdot 2 P_2 = 10 \cdot n, \quad \text{also}$$
$$(2 + P_2) \quad P_2 = 5 \cdot n \quad \text{ist.}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung einer natürlichen Zahl in Primfaktoren gilt entweder

$$2 + P_2 = 5, \quad \text{d. h.} \quad P_2 = 3$$

oder $P_2 = 5$.

Also erfüllen höchsten die Primzahlen (2; 3) und (2; 5) die Bedingungen.
In der Tat haben sie die verlangten Eigenschaften; denn ihre Summen $P_1 + P_2$ sind 5 bzw. 7, jeweils also eine Primzahl. Die Produkte $(P_1 + P_2)\, P_1P_2$ sind 30 bzw. 70, jeweils also durch 10 teilbar.

833) <u>Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

(I) Angenommen, k sei ein Kreis, der den Bedingungen der Aufgabe genügt. A sei sein Berührungspunkt mit SP, B der mit SR und C der mit dem Bogen $\overset{\frown}{PR}$. Der Mittelpunkt M des Kreises k liegt dann auf dem Strahl s aus S durch C; ferner ist $\triangle SAM \cong \triangle SBM$ wegen $\overline{SM} = \overline{SM}$, $\overline{MA} = \overline{MB}$ (Radius von k) und $\overline{\sphericalangle MAS} = \overline{\sphericalangle MBS} = 90^\circ$.

Daher ist $\overline{\sphericalangle MSA} = \overline{\sphericalangle MSB}$, so daß s den Winkel $\sphericalangle PSR$ halbiert. Wegen $\overline{MA} = \overline{MC}$ ist weiter $\triangle ACM$ gleichschenklig und somit

$\overline{\sphericalangle ACM} = \overline{\sphericalangle CAM} = \frac{1}{2}\overline{\sphericalangle AMS}$, letzteres nach dem Außenwinkelsatz, der hier anwendbar ist, weil wegen der vorausgesetzten Berührung von innen M zwischen S und C liegt.

Sind jetzt M' ein beliebiger von S verschiedener Punkt auf s, A' der Fußpunkt des Lotes von M' auf die Gerade durch S und P und C' der Schnittpunkt von s mit dem Kreis um M' mit dem Radius $\overline{M'A'}$, so ist

$\overline{\sphericalangle A'M'S} = \overline{\sphericalangle AMS}$, weil $\triangle AMS \sim \triangle A'M'S$ ist. Es gilt nämlich $\overline{\sphericalangle ASM} = \overline{\sphericalangle A'SM'}$ und $\overline{\sphericalangle SAM} = \overline{\sphericalangle SA'M'} = 90^\circ$

Daher genügt ein Kreis k nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(II) (1) Man konstruiert die Halbierende des Winkels $\sphericalangle PSR$, in dessen Innerem der Bogen $\overset{\frown}{PR}$ verläuft. Ihr Schnittpunkt mit dem Bogen $\overset{\frown}{PR}$ sei C.

(2) Man wählt einen beliebigen Punkt M' auf SC. Von M' fällt man das Lot M'A' auf SP.

(3) Man schlägt um M' den Kreis k' mit dem Radius $\overline{M'A'}$. Der Schnittpunkt von k' mit der Verlängerung von SM' über M' hinaus sei C'.

(4) Man zeichnet die Parallele zu A'C' durch C. Ihr Schnittpunkt mit SP sei A.

(5) Man errichtet auf SP in A die Senkrechte. Ihr Schnittpunkt mit SC sei M.

(6) Man schlägt den Kreis k um M mit dem Radius $\overline{MA}$.

(III) Jeder so konstruierte Kreis k genügt den Bedingungen der Aufgabe.

<u>Beweis</u>:

Da gemäß (5) $\sphericalangle MAS = 90^\circ$ ist und gemäß (4) A auf SP liegt, berührt k die Strecke SP, und zwar in A. Aus Symmetriegründen berührt daher k auch die Strecke SR.

Wegen CA $\parallel$ C'A' (nach (4)) gilt

$\sphericalangle SCA = \sphericalangle SC'A'$ und wegen MA $\parallel$ M'A' (nach (2) und (5)) und, da M auf SC liegt (nach (5)),

$\sphericalangle CMA = \sphericalangle C'M'A'$.

Daher gilt $\triangle CMA \sim \triangle C'M'A'$, und wegen $\overline{M'A'} = \overline{M'C'}$ ist $\overline{MA} = \overline{MC}$. Daher berührt k den Bogen $\overset{\frown}{PR}$ in C, dem gemeinsamen Punkt von k, $\overset{\frown}{PR}$ und der Zentralen durch M und S.

(IV) Die Konstruktionen in (II) sind alle (eindeutig) ausführbar. Das ist für (1), (3) und (6) bekannt und ergibt sich für (2), (4) und (5) folgendermaßen:

(2): Für den Fußpunkt $\overbrace{A' \text{ von } M'}^{\text{des Lotes}}$ auf die Gerade durch S und P gilt $\overline{SA'} < \overline{SM'} < \overline{SC} = \overline{SP}$, also liegt A' auf SP wegen $\sphericalangle CSP < 90^\circ$.

(4): Weil M' auf SC' liegt, gilt $\overline{SA'} < \overline{SC'}$ und folglich nach dem Strahlensatz für den Schnittpunkt A mit der Geraden durch S und P

$\overline{SA} < \overline{SC} = \overline{SP}$, also liegen wegen $\sphericalangle CSP < 90^\circ$ der Punkt A auf SP.

(5): Der Schnittpunkt M mit der Geraden, durch S und C gilt nach dem Strahlensatz und weil M' auf SC' liegt,

$$\overline{SM} = \frac{\overline{SM'}}{\overline{SC'}} \cdot \overline{SC} < \overline{SC},$$ woraus, weil A auf SP liegt und $\sphericalangle CSP < 90^{o}$ ist, folgt, daß M auf SC liegt.

<u>Bemerkungen</u>: Zu dieser Konstruktion führt auch folgende Überlegung: Einerseits hat - nach Konstruktion von M', A', C' wie in (I) bzw. (II) (1) bis (3) - die Figur aus k' und dem zum Zentriwinkel $\sphericalangle$ PSR gehörenden Bogen des Kreises aus S durch C' die geforderten Berührungseigenschaften (mit diesem Bogen statt $\overset{\frown}{PR}$). Andererseits muß diese Figur durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum S in die Figur um den gesuchten Kreis und den Bogen $\overset{\frown}{PR}$ übergehen, da bei zentrischen Streckungen Kreise in Kreise übergehen, Geraden durch das Zentrum in sich selbst, und da Berührungen erhalten bleiben.

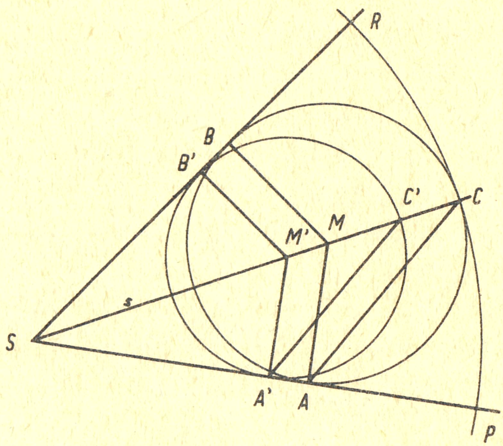

Abb. L 833

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

834) Lösung: 7 Punkte

Es wurden genau je 2 Spiele der folgenden Zusammenstellung gespielt: AB, AC, AD, BC, BD, CD. Daher wurden insgesamt 12 Partien gespielt und mithin 12 Punkte vergeben.
Wenn nun bei einer Punktverteilung, die den Angaben entspricht, Achim, Bernd, Christian und Detlef in dieser Reihenfolge a, b, c, d Punkte erzielten, so gilt:

$$a + d + 1 = b + c \qquad (1),$$

$$c + d = 7 \qquad (2),$$

$$b + d = a + c + 5 \qquad (3).$$

Weil 12 Punkte insgesamt vergeben wurden, d. h. $a + b + c + d = 12$ gilt, kann man aus dem entstandenen Gleichungssystem von 4 Gleichungen der Reihe nach die Unbekannten zu eliminieren und dann der Reihe nach zu ermitteln versuchen.

So folgt z. B. aus (1)

$$a + d = 5{,}5 \qquad (4),$$

und $$b + c = 6{,}5 \qquad (5).$$

Analog schließt man aus (3)

auf $$b + d = 8{,}5 \qquad (6)$$

und $$a + c = 3{,}5 \qquad (7).$$

Außerdem folgt aus (2)

$$a + b = 5 \qquad (8).$$

Durch Addition erhält man aus (7) und (8)

$$2a + b + a = 8{,}5$$

und daraus sowie aus (5) $2a + 6{,}5 = 8{,}5$, also $a = 1$.

Damit ergibt sich aus (4) $d = 4{,}5$,
aus (6) $b = 4$
und aus (7) $c = 2{,}5$.

Daher kann nur die Antwort, Achim erhielt 1 Punkt, Bernd 4 Punkte, Christian 2,5 Punkte und Detlef 4,5 Punkte, den Angaben entsprechen.

In der Tat erfüllt diese Antwort alle Bedingungen der Aufgabe. Denn wie die folgende Tabelle zeigt, gibt es Beispiele für eine Verteilung der Partieausgänge, bei der die in der Antwort genannte Punktverteilung entsteht. Ferner erhielten bei ihr Bernd und Christian zusammen 6,5 Punkte, also genau einen Punkt mehr als die 5,5 Punkte von Achim und Detlef. Weiterhin erhielten Christian und Detlef zusammen genau 7 Punkte. Schließlich erreichten Achim und Christian zusammen 3,5 Punkte, also genau 5 Punkte weniger als die 8,5 Punkte von Bernd und Detlef.

	A	B	C	D	
A	X	1	0	0	1
B	1	X	2	1	4
C	2	0	X	0,5	2,5
D	2	1	1,5	X	4,5

In jedem Fall steht die Anzahl der Punkte, die der in der jeweiligen Zeile stehende Spieler beim Spiel gegen den in der entsprechenden Spalte stehenden Spieler erzielte.

835) Lösung <u>7 Punkte</u>

Es seien A, B, C und D Eckpunkte des Trapezes, und es sei $AB \parallel CD$. Weiterhin seien E der Mittelpunkt der Seite BC, F der Mittelpunkt der Seite AD sowie G der Mittelpunkt der Diagonalen AC und H der Mittelpunkt der Diagonalen BD. Dann liegen nach der Umkehrung eines Teiles des Strahlensatzes und dem Satz über die Mittelparallele im Trapez ABCD die Punkte G und H auf FE (Abb. L 835).

L 8; II

Man wähle die Bezeichnung so, daß $\overline{AB} \geq \overline{CD}$ ist.

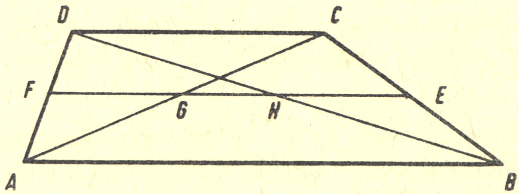

Abb. L 835

<u>Behauptung</u>: $\overline{GH} = \frac{1}{2}(\overline{AB} - \overline{CD})$.

<u>Beweis</u>: Aus dem Satz, daß in jedem Dreieck die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Seiten parallel zur dritten verläuft und halb so lang wie diese ist, oder nach der Umkehrung eines Teiles des Strahlensatzes folgt

(1) $\overline{FH} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ sowie (2) $\overline{FG} = \frac{1}{2}\overline{CD}$.

Aus (1) und (2) folgt

$\overline{FH} - \overline{FG} = \frac{1}{2}(\overline{AB} - \overline{CD}) = \overline{GH}$, w.z.b.w..

836) <u>Lösung</u>: <u>7 Punkte</u> <u>a) 3 Punkte</u> <u>b) 4 Punkte</u>

a) In x kg der 25-prozentigen Lösung befinden sich $\frac{25\,x}{100}$ kg des gelösten Stoffes, in y kg der 60-prozentigen Lösung entsprechend $\frac{60y}{100}$ kg.

Somit hat x : y genau dann den gesuchten Wert, wenn sich in den durch Zusammengießen erhaltenen (x + y) kg genau $\frac{35\,(x+y)}{100}$ kg des gelösten Stoffes befinden, d. h. genau dann, wenn

$\frac{25\,x}{100} + \frac{60\,y}{100} = \frac{35\,(x+y)}{100}$ gilt. Dies ist der Reihe nach

äquivalent mit $25\,x + 60\,y = 35\,x + 35\,y$,

$$25\,y = 10\,x,$$

$$\frac{5}{2} = \frac{x}{y}.$$

Das gesuchte Mischungsverhältnis beträgt somit 5 : 2.

b) Mit analoger Begründung wie in a) hat $x : y$ genau dann den gesuchten Wert, wenn

$$\frac{p_1}{100} x + \frac{p_2}{100} y = \frac{p}{100} \cdot (x + y) \text{ gilt.}$$

Dies ist der Reihe nach äquivalent mit

$$p_1 x + p_2 y = p x + p y,$$

$$(p_2 - p) y = (p - p_1) x,$$

$$\frac{p_2 - p}{p - p_1} = \frac{x}{y} .$$

Das gesuchte Mischungsverhältnis lautet:

$$\frac{p_2 - p}{p \cdot p_1}$$