A 8 XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 8

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind gut lesbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

821) Bei einer Kreisspartakiade wurden für die Teilnehmer insgesamt 61 Goldmedaillen, 63 Silbermedaillen und 60 Bronzemedaillen vergeben. Die Mannschaften der Schulen der Stadt B erkämpften dabei zusammen 42 dieser Medaillen. Sie erhielten genau ein Drittel aller Silbermedaillen, mehr als ein Sechstel, jedoch weniger als ein Fünftel aller Bronzemedaillen und einige Goldmedaillen.
Ermittle die Anzahl aller Gold-, Silber- und Bronzemedaillwn, die von den Schülern der Stadt B bei diesem Wettkampf errungen wurden!

822) Vier Lastkraftwagen A, B, C und D befahren dieselbe Strecke. Fährt A mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 56 $\frac{km}{h}$ und B mit 40 $\frac{km}{h}$, so benötigt A genau 2 Stunden weniger als B für diese Strecke.
Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit müßte C fahren, wenn D genau 4 Stunden eher als C abfahren, durchschnittlich mit 35 $\frac{km}{h}$ fahren und gleichzeitig mit C am gemeinsamen Ziel ankommen soll?

823) Gegeben sei ein Dreieck ABC, das folgender Bedingung genügt:

Die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$ beträgt ein Viertel der Größe des Außenwinkels bei A.

a) Stelle fest, ob es auf AB einen Punkt D gibt, für den $\overline{AD} = \overline{AC}$ gilt!

b) Beweise, daß für jeden derartigen Punkt $\overline{DB} = \overline{DC}$ gilt!

824) Konstruiere einen Kreis k, der folgende Eigenschaft hat: Ist AB ein Durchmesser von k, g die Tangente an k in B und liegt ein Punkt Q so auf g, daß $\overline{BQ} = 6$ cm gilt, so schneidet k die Strecke AQ in einem Punkt P, für den $\overline{PQ} = 3$ cm gilt.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein derartiger Kreis k bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist.

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

821) Lösung: 8 Punkte

Die Anzahl aller von den Schülern der Stadt B bei dieser Kreisspartakiade errungenen Goldmedaillen sei g, die der Silbermedaillen s und die der Bronzemedaillen b.

Dann gilt laut Aufgabe:

$g + s + b = 42$ (1), $s = \frac{63}{3} = 21$, (2)

$10 < b < 12$ (3).

Daraus folgt, da b ganzzahlig ist, $b = 11$ und somit wegen (1) und (2) $g = 42 - 21 - 11 = 10$.

Die Schüler der Stadt B errangen 10 Gold-, 21 Silber- und 11 Bronzemedaillen.

822) Lösung: 10 Punkte

Angenommen, A habe die in der Aufgabe genannte Strecke in t Stunden zurückgelegt. Dann benötigte B für dieselbe Strecke (t + 2) Stunden). Daher gilt
$56\,t = 40\,(t + 2)$, woraus man $t = 5$ erhält.

A legte mithin die Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $56\ \frac{km}{h}$ in 5 Stunden zurück. Die Strecke war daher 280 km lang.

Wegen $280 : 35 = 8$ würde D für diese Strecke bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $35\ \frac{km}{h}$ genau 8 Stunden brauchen. Da C erst 4 Stunden später als D abfahren soll, müßte er die gesamte Strecke in genau 4 Stunden zurücklegen, wenn er gleichzeitig mit D am Ziel eintreffen will. Wegen $280 : 4 = 70$ müßte er dabei eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $70\ \frac{km}{h}$ einhalten.

823) <u>Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

Es sei $\overline{\sphericalangle ABC} = \beta$. Dann hat der Außenwinkel bei A laut Aufgabe die Größe 4β. Nach dem Satz über den Außenwinkel am Dreieck beträgt die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB$ somit 3β, also gilt $\overline{\sphericalangle ACB} > \overline{\sphericalangle ABC}$.

Daraus folgt, da im Dreieck dem größeren von zwei Winkeln jeweils die längere Seiten gegenüberliegt, $\overline{AB} > \overline{AC}$. Daher gibt es auf AB einen Punkt D, für den $\overline{AD} = \overline{AC}$ gilt. Mithin sind A, D, C die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks. Daraus und aus dem Außenwinkelsatz folgt

$\overline{\sphericalangle ADC} = \overline{\sphericalangle ACD} = 2\beta$.

Schließlich erhält man für jeden Punkt D der genannten Art

$\overline{\sphericalangle DCB} = \overline{\sphericalangle ACB} - \overline{\sphericalangle ACD} = 3\beta - 2\beta = \beta = \overline{\sphericalangle DBC}$, also ist $\triangle$ CDB gleichschenklig mit $\overline{DB} = \overline{DC}$, w.z.b.w..

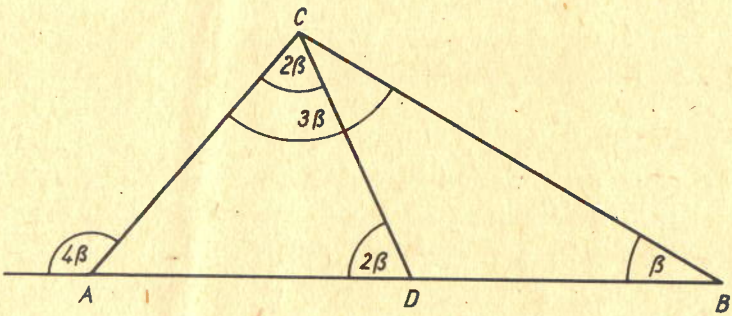

Abb. L 823

824) <u>Lösung:</u> <u>12 Punkte</u>

(I) 4 Pkt. (II) 3 Pkt. (III) 4 Pkt. (IV) 1 Pkt.

(I) Angenommen, k sei ein Kreis, wie er laut Aufgabenstellung konstruiert werden soll. Sein Mittelpunkt sei M. Dann ist nach dem Satz des Thales $\sphericalangle APB$ ein rechter Winkel und als sein Nebenwinkel $\sphericalangle BPQ$ ebenfalls ein

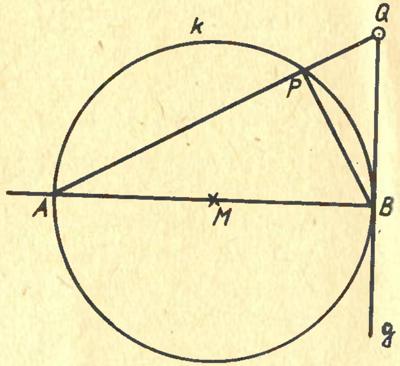

Abb. L. 824

rechter Winkel. Folglich liegt P erstens auf dem Halbkreis über BQ und zweitens auf dem Kreis um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$. Punkt A liegt erstens auf dem Strahl aus Q durch P und zweitens auf der Senkrechten zu BQ durch B.

Daraus folgt, daß ein Kreis nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(II) (1) Wir zeichnen die Strecke BQ der Länge 6 cm.

(2) Wir schlagen über BQ einen Halbkreis.

(3) Wir schlagen um Q mit dem Radius der Länge 3 cm einen Kreis. Schneidet er den in (2) gezeichneten Halbkreis in einem Punkt, so sei dieser P genannt.

(4) Wir errichten in B die Senkrechte zu g.

(5) Wir zeichnen den Strahl aus Q durch P. Schneidet er die in (4) konstruierte Senkrechte, so sei der Schnittpunkt A genannt.

(6) Wir zeichnen den Kreis k mit dem Durchmesser AB.

(III) Jeder so konstruierte Kreis k entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:

Nach Konstruktion gilt $\overline{BQ} = 6$ cm und $\overline{PQ} = 3$ cm. Der Kreis k berührt die Gerade g laut Konstruktion in B, da $AB \perp g$ ist. Ferner liegt laut Konstruktion P auf AQ (und zwar ist $P \neq A$)*). Wegen $BP \perp PQ$ (nach dem Satz von Thales) und damit $BP \perp AP$ liegt P nach der Umkehrung des Satzes des Thales auf dem Kreis k mit dem Durchmesser AB sowie laut Konstruktion auf AQ.

---

*) Ein Beweis, daß $P \neq A$ ist, wird vom Schüler hier nicht verlangt.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ebenso ist (2) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. (3) liefert bei den gegebenen Längen für BQ und PQ genau einen Schnittpunkt P. (4) ist eindeutig ausführbar, ebenso (5), und es gibt, da der in (5) konstruierte Strahl einen spitzen Winkel mit dem Strahl aus Q durch B bildet, genau einen Schnittpunkt A des in (5) konstruierten Strahles mit der in (4) konstruierten Senkrechten. Schließlich ist auch (6) eindeutig ausführbar. Der Kreis k ist durch die gegebenen Stücke mithin bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

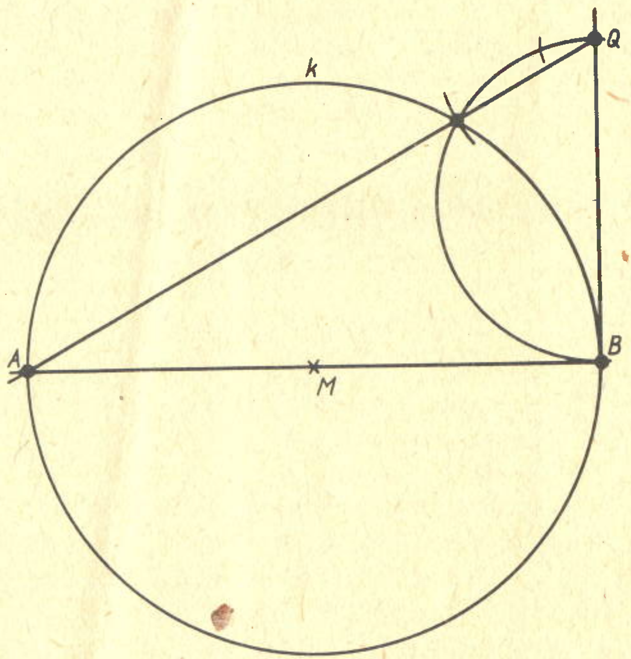

Abb. L 824 a