XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

721) **Lösung:** 8 Punkte

Aus (6), (3) und (2) folgt, daß weder die Schülerin Müller noch die Schülerin Richter am besten abschnitt. Folglich lautet der Zuname der erfolgreichsten Schülerin Naumann. Wegen (4) lautet ihr Vorname nicht Angelika und wegen (1) sowie (5) auch nicht Beate. Folglich heißt sie Christine. Die erfolgreichste der drei Schülerinnen heißt Christine Naumann.

722) **Lösung:** 10 Punkte

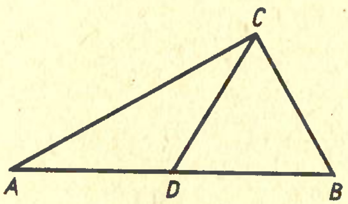

Abb. L 722

Wegen (1) ist das Dreieck ABC gleichseitig. Jeder seiner Innenwinkel ist mithin 60° groß.
Aus (1) folgt ferner, da D der Mittelpunkt von AB ist, $\overline{AD}$ (= $\overline{DB}$) = $\overline{CD}$. Also ist $\triangle$ ADC gleichschenklig.
Als Nebenwinkel des Winkels $\sphericalangle$BDC hat der Winkel $\sphericalangle$ADC eine Größe von 120°.
Folglich hat der Winkel $\sphericalangle$ ACD als einer der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ADC eine Größe von 30°. Da die Größe des Winkels $\sphericalangle$ ACB gleich der Summe der Größen der Winkel $\sphericalangle$ BCD und $\sphericalangle$ACD ist, beträgt diese $60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, das Dreieck ABC ist also rechtwinklig, w.z.b.w..

L 7

723) <u>Lösung:</u> <u>12 Punkte</u>

(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es laut Aufgabenstellung konstruiert werden soll (Abb. L. 723)

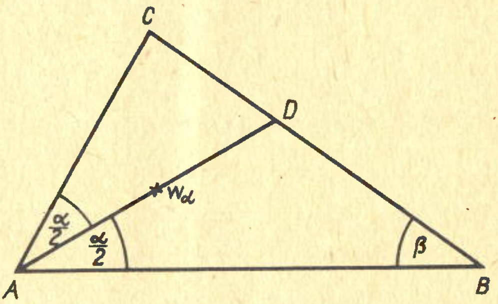

Abb. L 723

AD sei die Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAC$, wobei D auf BC liegt. Dann sind von dem Teildreieck ABD die Stücke $\overline{AD} = w_\alpha$, $\overline{\sphericalangle BAD} = \frac{\alpha}{2}$ und $\overline{\sphericalangle ABD} = \beta$ bekannt. Punkt C liegt erstens auf dem freien Schenkel des in A an AB nach derselben Seite der Geraden durch A und B wie D angetragenen Winkels der Größe α und zweitens auf dem Strahl aus B durch D.
Daraus folgt, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(II) (1) Wir konstruieren das Dreieck ABD aus $\overline{AD} = 5{,}5$ cm, $\overline{\sphericalangle BAD} = 30^\circ$ und $\overline{\sphericalangle ABD} = 35^\circ$.

(2) Wir tragen in A an AB einen Winkel der Größe 60° nach derselben Seite der Geraden durch A und B an, auf der D liegt.

(3) Wir zeichnen den Strahl aus B durch D. Schneidet er den freien Schenkel des in (2) konstruierten Winkels, so sei dieser Schnittpunkt C genannt.

(III) Jedes so konstruierte Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.
Beweis:
Nach Konstruktion hat der Winkel $\sphericalangle BAC$ die Größe 60°. Ebenso hat nach Konstruktion der Winkel $\sphericalangle ABC$ die Größe 35°. Schließlich ist nach Konstruktion AD Halbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$ und hat die Länge 5,5 cm.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ebenso sind die Konstruktionsschritte (2) und (3) eindeutig ausführbar. Da sowohl $\sphericalangle BAC$ als auch $\sphericalangle ABD$ spitze Winkel sind, gibt es genau einen Schnittpunkt C. Mithin ist $\triangle ABC$ durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

724) Lösung: 10 Punkte

Angenommen, die Angaben treffen zu, wenn das Buch x Seiten hat. Von ihnen las Fritz am ersten Tag $\frac{x}{12}$ Seiten, an den folgenden 4 Tagen zusammen $4 \cdot \frac{x}{8}$ Seiten, das sind zusammen $\frac{7}{12}x$ Seiten. Für den letzten Tag verblieben daher noch $\frac{5}{12}x$ Seiten. Das waren laut Aufgabe 20 Seiten weniger als $\frac{7}{12}x$ Seiten.

Daraus folgt $\frac{2}{12}x = 20$ und somit $x = 6 \cdot 20 = 120$.

Somit können nur für die Antwort, das Buch habe 120 Seiten, die Angaben von Fritz zutreffen. In der Tat treffen sie hierfür zu; denn hat das Buch 120 Seiten, so las Fritz am ersten Tag 10 Seiten, an den folgenden 4 Tagen je 15 Seiten, bis dahin also zusammen 70 Seiten; und liest er noch (20 Seiten weniger), d. h. 50 Seiten, so ergibt sich genau die Seitenzahl des Buches, 120 Seiten.