

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen (Hilfslinien) mit deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind gut lesbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

621) Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck ABC und ein Dreieck $A_2B_2C_2$, ein Punkt F sowie eine Gerade g abgebildet.

Das Dreieck $A_2B_2C_2$ ist aus dem Dreieck ABC durch folgende Konstruktionen entstanden:

Zunächst wurde $\triangle ABC$ an g gespiegelt, wobei ein Dreieck $A_1B_1C_1$ entstand.

Danach wurde auf $\triangle A_1B_1C_1$ eine solche Verschiebung angewendet, daß $\triangle A_2B_2C_2$ als Bild des Dreiecks $A_1B_1C_1$ entstand.

Konstruiere unter Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck den Verschiebungspfeil \vec{PQ} dieser auf $\triangle A_1B_1C_1$ anzuwendenden Verschiebung.

Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

622) Klaus behauptet, eine von ihm aufgeschriebene natürliche Zahl z habe folgende Eigenschaften:

(1) Vertauscht man zwei geeignete Ziffern von z miteinander, so ist die auf diese Weise entstehende Zahl z' um 198 größer als z .

(2) Die Summe aus z und z' beträgt 13776.

Stelle fest, ob es genau eine Zahl z mit den von Klaus genannten Eigenschaften gibt!

Wenn dies der Fall ist, so ermittle diese Zahl!

623) Anita, Brigitte, Christa und Dana trugen untereinander einen Wettkampf aus. Auf die Frage, wer den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz belegte, wurden folgende drei Aussagen gemacht:

- (1) Anita siegte, Brigitte belegte den zweiten Platz.
- (2) Anita belegte den zweiten Platz, Christa den dritten.
- (3) Dana belegte den zweiten, Christa den vierten Platz.

Wie sich herausstellte, wurde in jeder der drei Aussagen (1), (2), (3) eine Platzierung richtig und eine falsch angegeben.

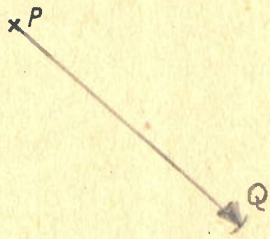
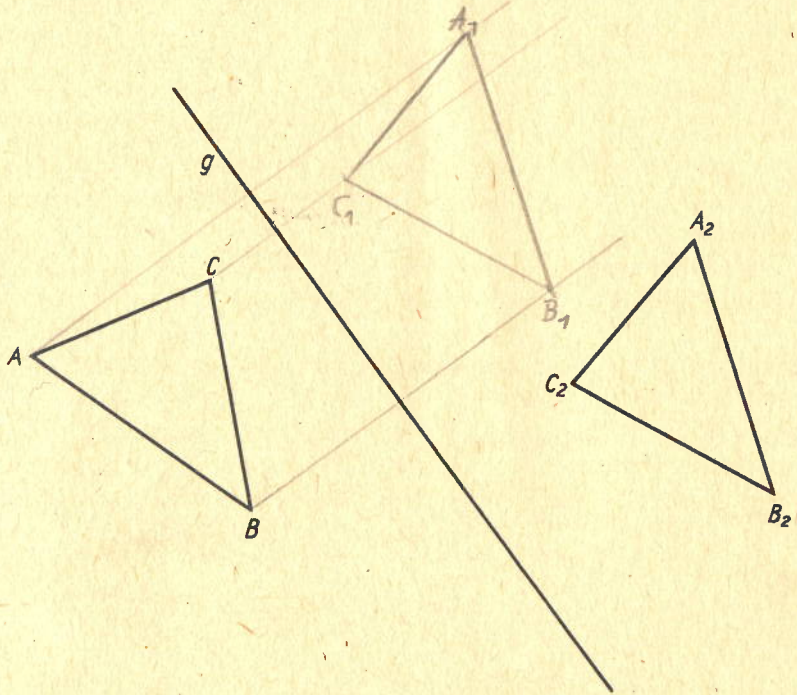
Wer belegte den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz?

624) Ein Radfahrer fuhr mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf einer Straße von A nach B. Er startete in A um 6.00 Uhr und legte in jeder Stunde 14 km zurück. Ein zweiter Radfahrer fuhr auf derselben Straße mit gleichbleibender Geschwindigkeit von B nach A. Er startete am selben Tag um 8.00 Uhr in B und legte in jeder Stunde 21 km zurück.

Beide Radfahrer begegneten sich genau am Mittelpunkt der Strecke von A nach B.

Um wieviel Uhr begegneten sie sich?

Wie lang ist die Strecke von A nach B?



L 6

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 6

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die
1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

621) Lösung:

10 Punkte

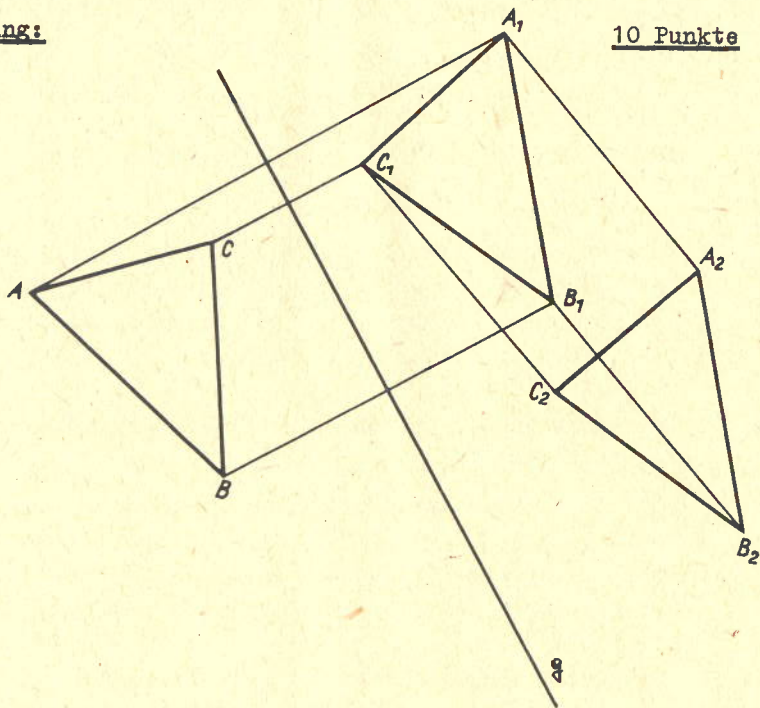


Abb. L 621

Als Lösung gilt
jede (einwandfreie)
Zeichnung, in der für
mindestens einen der
Punkte A_1 , B_1 bzw. C_1 bei
der Spiegelung an g und
dann gleichsinnig parallel

und gleichlang zu $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ bzw. $\overrightarrow{C_1C_2}$ der gesuchte Verschiebungspfeil \overrightarrow{PQ} konstruiert wurde.

622) Lösung:

8 Punkte

Wenn es eine Zahl z der genannten Art gibt, so gilt für sie und die Zahl z' :

$$(1) z' = 198 + z \quad \text{sowie}$$

$$(2) z + z' = 13776.$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$z + 198 + z = 13776, \text{ woraus man}$$

$$2z = 13776 - 198 = 13578, \text{ also}$$

$$z = 6789 \text{ erhält.}$$

Also kann nur diese Zahl die genannten Eigenschaften haben. In der Tat treffen nun Klaus' Aussagen für diese Zahl und $z' = 6789 + 198 = 6987$ zu, da z' aus z dadurch gewonnen werden kann, daß in z die Ziffern 7 und 9 miteinander vertauscht werden.

Daher hat genau die Zahl $z = 6789$ die von Klaus genannten Eigenschaften.

Oder: Die Summe aus z und einer um 198 größeren Zahl als z beträgt laut Aufgabe 13776. Daher ist das Doppelte der Zahl z gleich der Differenz aus 13776 und 198, also gleich 13578. Mithin ist z halb so groß wie 13578 und lautet daher 6789.

Vertauscht man in dieser Zahl die Ziffern 7 und 9 miteinander, so erhält man mit 6987 tatsächlich eine Zahl, die um 198 größer ist als z .

623) Lösung:

10 Punkte

Angenommen, in Aussage (1) wäre Brigittes Platzierung richtig angegeben, dann wären die Plätze von Anita in (2) und Dana in (3) falsch angegeben, und demnach müßte Christa den dritten und zugleich den vierten Platz belegt haben, was nicht möglich ist. Folglich ist in (1) die Platzierung von Anita richtig und die von Brigitte falsch angegeben,

L 6

d. h., Anita belegte den ersten Platz und Brigitte nicht den zweiten Platz. Danach ist in (2) der Platz Anitas falsch und der Christas richtig angegeben. Daraus folgt, daß in (3) der Platz Christas falsch und der Danas richtig angegeben wurde. Mithin belegten Anita den ersten, Dana den zweiten, Christa den dritten und Brigitte den vierten Platz.

624) Lösung:

12 Punkte

Der erste Radfahrer war um 8.00 Uhr genau zwei Stunden gefahren und hatte dabei eine Strecke von 28 km zurückgelegt. Von diesem Zeitpunkt an legte der zweite Radfahrer in jeder Stunde genau 7 km mehr zurück als der erste. Da sie sich genau am Mittelpunkt der Strecke von A nach B trafen, geschah das wegen $28 : 7 = 4$ genau 4 Stunden nach Abfahrt des zweiten Radfahrers, also um 12.00 Uhr. Bis zu diesem Zeitpunkt hatte wegen $6 \cdot 14 = 84$ bzw. $4 \cdot 21 = 84$ jeder von beiden genau 84 km zurückgelegt. Die Länge der Strecke von A nach B beträgt wegen $2 \cdot 84 = 168$ mithin 168 km.