XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklassen 11/12 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind gut lesbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1241) Es seien in einer Ebene zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gegeben. Dann wird durch

$$c_n = |\mathfrak{x} - n\mathfrak{y}| \text{ für } n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (1)$$

eine Folge reeller Zahlen definiert. Es sind notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, daß die Folge (1)

a) streng monoton steigend,

b) streng monoton fallend ist.

c) Für den Fall, daß die Folge (1) nicht streng monoton ist, ist zu untersuchen, ob es eine natürliche Zahl n_0 gibt, so daß die Folge (1) die Monotonieintervalle $1 \leqq n \leqq n_0$ und $n_0 < n$ besitzt.

1242) Ist x eine reelle Zahl, so bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.

(So ist z. B. $[\pi] = 3$; $[0{,}7] = 0$; $[5] = 5$; $[-0{,}7] = -1$)

a) Man zeige, daß es zwei rationale Zahlen a, b derart gibt, daß die Zahlen $c_n = an + b - [an + b]$ $(n = 1,2,\ldots)$ eine nicht-konstante Zahlenfolge bilden und daß dabei alle $c_n \neq 0$ sind.

b) Man beweise, daß für je zwei rationale Zahlen a, b die in a) definierte Zahlenfolge ein Minimum besitzt.

30 05 63-1 (588)

A 11/12; I

1243) Es seien n_1, n_2 zwei positive ganze Zahlen; in einer Ebene seien eine Menge M_1 aus $2n_1$ voneinander verschiedenen Punkten sowie eine Menge M_2 aus $2n_2$ voneinander und von jedem der Punkte aus M_1 verschiedenen Punkten so gelegen, daß es keine Gerade gibt, die durch drei dieser $2n_1 + 2n_2$ Punkte geht.

Man beweise, daß dann eine Gerade g mit folgender Eigenschaft existiert:

Zerlegt g die Ebene in die Halbebenen H und K (wobei g selbst weder zu H noch zu K gerechnet werde), so liegen sowohl in H als auch in K jeweils genau die Hälfte aller Punkte aus M_1 und genau die Hälfte aller Punkte aus M_2.

A 11/12; II   XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklassen 11/12   - 2. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind gut lesbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1244) Man ermittle alle Paare (f,g) von Funktionen, die für alle von -1; 0 und 1 verschiedenen reellen Zahlen x definiert sind und für alle diese x die Gleichungen

$$x \cdot f(x) - \frac{1}{x} \cdot g\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \qquad (1) \qquad \text{und}$$

$$\frac{1}{x^2} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \cdot g(x) \qquad (2) \qquad \text{erfüllen.}$$

1245) a) In einer Ebene sei $P_1P_2...P_n$ ein beliebiges konvexes n-Eck E.
Man beweise folgende Aussage:
Sind n Punkte $Q_1...Q_n$ so im Innern oder auf dem Rande von E gelegen, daß $Q_1Q_2...Q_n$ ein zu E kongruentes n-Eck ist, so ist jeder Punkt Q_i eine Ecke von E.

b) Gibt es nicht-konvexe n-Ecke E, für die die in a) genannte Aussage falsch ist?

c) Ist für jedes nicht-konvexe n-Eck E die in a) genannte Aussage falsch?

30 05 63-1 (588)

Von den nachstehenden Aufgaben 1246A und 1246B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

1246A) <u>Erklärungen</u>:

Auf einem Schaltbrett sei eine Anzahl n von Knöpfen $K_1, \dots, K_n$ zum Ein- und Ausschalten von Stromkreisen $S_1, \dots, S_n$ angebracht. Für jeden Knopf K_i werde durch einmaliges Drücken der Stromkreis S_i vom ausgeschalteten Zustand in den eingeschalteten Zustand bzw. umgekehrt von eingeschalteten in den ausgeschalteten Zustand überführt, unabhängig von den anderen Stromkreisen.

Unter einem "Schaltbild" B sei die gleichzeitige Angabe der Zustände aller Stromkreise S_i verstanden; z. B. stellt die Ausgangsstellung, bei der alle Stromkreise S_i ausgeschaltet sind, ein Schaltbild dar, das mit B_o bezeichnet sei. Sind B und B' Schaltbilder, so werde unter der "Summe" $B \oplus B'$ dasjenige Schaltbild verstanden, das nach folgender Vorschrift entsteht: Es sei B dadurch gekennzeichnet, daß genau die Stromkreise $S_{n_1}, \dots, S_{n_p}$ eingeschaltet sind; es sei B' dadurch gekennzeichnet, daß genau die Stromkreise $S_{k_1}, \dots, S_{k_q}$ eingeschaltet sind.

Dann beginne man mit dem Schaltbild B_o und

(a) drücke die Knöpfe $K_{n_1}, \dots, K_{n_p}$, jeden genau einmal.

Anschließend (ohne nach B_o zurückzugehen!)

(b) drücke man genau die Knöpfe $K_{k_1}, \dots, K_{k_q}$, jeden genau einmal.

Unter dem "Produkt" $B \otimes B'$ werde dasjenige Schaltbild verstanden, das nach folgender Vorschrift entsteht:

Man beginne mit dem Schaltbild B_o, verfahre nach den Vorschriften (a), (b) und anschließend (c) drücke man genau diejenigen Knöpfe, die bei mindestens einem der beiden Teilprozesse (a), (b) bereits gedrückt worden waren, jeden noch genau einmal.

A 11/12; II

Man beweise die folgenden beiden Aussagen:

(1) Sind B, B', B" Schaltbilder, so gilt

$$(B \oplus B') \otimes B'' = (B \otimes B'') \oplus (B' \otimes B'')$$

(2) Sind B, B' Schaltbilder, so gibt es genau ein Schaltbild B^* mit der Eigenschaft $B^* \oplus B' = B$, nämlich $B^* = B \oplus B'$.

1246B) a) Man beweise folgende Behauptung:

Es gibt keine ganzrationale Funktion f, bei der für jedes x die beiden Ungleichungen

(1) $f(x) > f''(x)$,

(2) $f'(x) > f''(x)$ gelten.

b) Entsteht eine richtige Behauptung, wenn man in der bei a) gemachten Behauptung die Ungleichung (2) durch

(3) $f(x) > f'(x)$ ersetzt?

L 11/12; I XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

1241) **Lösung:** **5 Punkte**

In der Beziehung $c_n \lesseqgtr c_{n+1}$ gilt genau dann das obere, mittlere bzw. untere Zeichen, wenn dies in den folgenden Beziehungen der Fall ist:

$$(x - ny)^2 \lesseqgtr (x - (n+1)y)^2,$$

$$x^2 - 2nxy + n^2y^2 \lesseqgtr x^2 - 2nxy - 2xy + n^2y^2 + 2ny^2 + y^2,$$

$$2xy - y^2 \lesseqgtr 2ny^2.$$ Daraus ergibt sich:

Wenn $\frac{2xy - y^2}{2} < 1$ ist, so ist für alle n = 1, 2, ...

auch $\frac{2xy - y^2}{2y^2} < n$, also $c_n < c_{n+1}$: Die Folge ist streng monoton steigend.

Wenn $\frac{2xy - y^2}{2y^2} \geqq 1$ ist, so gibt es eine ganze Zahl $n_o \geqq 1$ mit

(2) $n_o \leqq \frac{2xy - y^2}{2y^2} < n_o + 1.$

Für $n = 1, \ldots, n_o$ gilt dann $\frac{2xy - y^2}{2y^2} \geqq n$, also $c_n \geqq c_{n+1}$;

für $n = n+1, n+2, \ldots$ gilt dagegen $\frac{2xy - y^2}{2y^2} < n$,

also $c_n < c_{n+1}$.

Die Folge ist nicht streng monoton; sie hat die Monotonieintervalle $1 \leqq n \leqq n_o$ und $n_o < n$.

Schließlich gilt in der Beziehung $\frac{2xy - y^2}{2y^2} \lesseqgtr 1$ dasselbe Zeichen wie in $2xy \lesseqgtr 3 \cdot y^2$. Daher ergibt sich insgesamt:

a) Die Folge ist genau dann streng monoton steigend, wenn $2\mathfrak{x}\mathfrak{y} < 3\mathfrak{y}^2$ gilt.

b) Die Folge ist für keine Vorgabe von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ streng monoton fallend.

c) Die Folge ist genau dann nicht monoton, wenn $2\mathfrak{x}\mathfrak{y} \geqq 3\mathfrak{y}^2$ gilt, und dann hat sie mit der durch (2) gekennzeichneten natürlichen Zahl n_0 die Monotonieintervalle $1 \leqq n \leqq n_0$ und $n_0 < n$

(Zusatzbemerkung: Übrigens läßt sich die Fallunterscheidung geometrisch interpretieren: Fall a) liegt genau dann vor, wenn für $\mathfrak{x} = \overrightarrow{OX}$ und $\mathfrak{y} = \overrightarrow{OY}$ der Punkt X auf derselben Seite der mittelsenkrechten Ebene der Strecke OY wie O liegt.)

1242) <u>Lösung:</u> <u>6 Punkte</u> a) 2 Punkte

b) 4 Punkte

a) Es genügt, ein Beispiel anzugeben. Ein solches ist etwa

$a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$; denn für alle geraden n wird

$$c_n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{2}n + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}n = \frac{1}{4}, \text{ und für}$$

alle ungeraden n wird

$$c_n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{2}n + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

b) Für jedes rationale a gibt es eine ganze Zahl p und eine positive Zahl q mit $a = \frac{p}{q}$. Für jedes $n = 1, 2, \ldots$ gilt dann

$$c_{n+q} = \frac{p}{q}(n+q) + b - \left[\frac{p}{q}(n+q) + b\right] = \frac{p}{q}n + p + b - \left[\frac{p}{q}n + p + b\right]$$

$$= \frac{p}{q}n + p + b - \left(\left[\frac{p}{q}n + b\right] + p\right) = \frac{p}{q}n + b - \left[\frac{p}{q}n + b\right] = c_n.$$

Mithin besteht der Wertevorrat einer derartigen Folge nur aus den endlich vielen (verschiedenen unter den) Zahlen $c_1, \ldots, c_q$; die Folge besitzt daher ein Minimum.

1243) Lösung: 8 Punkte

In der Ebene werde ein Strahl s gewählt, sein Ausgangspunkt sei O.
Für jedes α mit $0^\circ \leqq \alpha \leqq 180^\circ$ gehe s durch die Drehung der Größe α mit dem Drehpunkt O und positivem Drehsinn in den Strahl s (α) über. Mit g(α) sei diejenige orientierte Gerade bezeichnet, in der s(α) liegt und für die s(α) die positive Richtung angibt.

Von jedem Punkt $P \in M_i$ (i = 1, 2) werde das Lot PP(α) auf g(α) gefällt. Die (vorzeichenbehaftete) Länge der gerichteten Strecke OP(α) in der orientierten Geraden g(α) sei $d_P(\alpha)$ genannt.
Für jedes i = 1, 2 und jedes α ordne man den Längen $d_P(\alpha)$ ($P \in M_i$) in ansteigender Reihenfolge die Zahlen 1, ..., $2n_i$ zu; dabei sind im Falle

(1) $P \in M_i$; $P' \in M_i$; $P \neq P'$; $d_P(\alpha) = d_{P'}(\alpha)$

der Länge $d_P(\alpha)$ genau zwei (aufeinanderfolgende) Zahlen zuzuordnen. Da auf der Senkrechten zu g(α) durch P(α) nicht mehr als zwei Punkte aus M_i liegen, ist diese Zuordnung stets möglich. Diejenigen Abstände unter den $d_P(\alpha)$, denen die Zahlen n_i und $n_i + 1$ zugeordnet sind, seien mit $h_i(\alpha)$ bzw. $k_i(\alpha)$ bezeichnet. Das offene Intervall $(h_i(\alpha), k_i(\alpha))$ heiße $J_i(\alpha)$.
Für jedes $P \in M_i$ hängt P(α) wegen

$d_P(\alpha) = \overline{OP} \cdot \cos(\sphericalangle(s, \overrightarrow{OP}) - \alpha)$ stetig von α ab. Ferner gibt es nur endlich viele α, zu denen P, $P' \in M_i$ mit (1) existieren, nämlich genau diejenigen, für die g(α) senkrecht auf der durch (mindestens) ein Punktpaar aus M_i gehenden Geraden steht.

Zu jedem Intervall, das kein solches α enthält, gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt $P \in M_i$ mit (2) $h_i(\alpha) = d_P(\alpha)$; treffen zwei dieser Intervalle bei einem α zusammen, so kann dort das in (2) auftretende P nur im Falle (1) in ein anderes $P' \in M_i$ überwechseln. Daher variiert insgesamt auch $h_i(\alpha)$ kontinuierlich (stetig). Dasselbe gilt für $k_i(\alpha)$.

Nun zeigen wir, daß ein $\hat{\alpha}$ existiert, für das die Intervalle $J_1(\hat{\alpha})$, $J_2(\hat{\alpha})$ einen Wert gemeinsam haben, der im Innern eines dieser beiden Intervalle liegt. Hat nämlich $\hat{\alpha} = 0^\circ$ diese Eigenschaft nicht, so liegt $J_1(0^\circ)$ bis auf einen eventuell auftretenden gemeinsamen Randwert ganz unterhalb oder ganz oberhalb von $J_2(0^\circ)$. Für $J_1(180^\circ)$ und $J_2(180^\circ)$ gilt die umgekehrte Anordnung; denn für jeden Punkt P gilt $d_P(180^\circ) = -d_P(0^\circ)$, woraus $h_i(180^\circ) = -k_i(180^\circ)$, $k_i(180^\circ) = -h_i(0^\circ)$ $(i = 1, 2)$ folgt.

Wegen der stetigen Abhängigkeit müssen also, wenn α das Intervall von 0° bis 180° durchläuft, bei wenigstens einem $\hat{\alpha}$ die Intervalle $J_1(\hat{\alpha})$, $J_2(\hat{\alpha})$ einen nichtleeren Durchschnitt haben, und für ein solches $\hat{\alpha}$ können nicht beide $J_1(\hat{\alpha})$, $J_2(\hat{\alpha})$ zum Punkt entarten, da sonst vier verschiedene Punkte (zwei aus M_1, zwei aus M_2) auf derselben Senkrechten zu $g(\hat{\alpha})$ lägen.

Sind für $\hat{\alpha}$ beide Intervalle $J_1(\hat{\alpha})$, $J_2(\hat{\alpha})$ nicht entartet, so setzen wir $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha}$.
Ist für $\hat{\alpha}$ eines der Intervalle $J_1(\hat{\alpha})$, $J_2(\hat{\alpha})$ zum Punkt (im Innern des anderen) entartet, so kann man $\hat{\alpha}$ um einen so kleinen Betrag in ein $\tilde{\alpha}$ abändern, daß beide Intervalle $J_1(\tilde{\alpha})$, $J_2(\tilde{\alpha})$ nicht entartet sind, aber immer noch einen Wert gemeinsam haben, der im Innern eines dieser beiden Intervalle liegt.

Nach diesen Definitionen haben $J_1(\tilde{\alpha})$, $J_2(\tilde{\alpha})$ dann auch einen Wert w gemeinsam, der im Innern dieser beiden Intervalle liegt.

Es sei W derjenige Punkt auf $g(\tilde{\alpha})$, für den die gerichtete Strecke OW in der orientierten Geraden $g(\tilde{\alpha})$ die Länge w hat; es sei g die auf $g(\tilde{\alpha})$ senkrechte Gerade durch W. Dann hat g die verlangte Eigenschaft; denn die Halbebenen, in die g die Ebene zerlegt, lassen sich so mit H, K bezeichnen, daß für $i = 1, 2$ in H diejenigen $P \in M_i$ liegen, für die den Längen $d_P(\tilde{\alpha})$ die Zahlen $1, \ldots, n_i$ zugeordnet sind, dagegen in K die $P \in M_i$ mit den zugeordneten Zahlen $n_i + 1, \ldots, 2n_i$.

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

1244) Lösung: 6 Punkte

Angenommen, (f,g) sei ein Paar von Funktionen mit den verlangten Eigenschaften. Für jedes $t \neq 0, 1, -1$ gilt dann

$$t\cdot g(t) = \frac{1}{t^3}\cdot f\left(\frac{1}{t}\right).$$

Da für jedes $x \neq 0, 1, -1$ auch $t = \frac{1}{x} \neq 0, 1, -1$ ist, gilt für alle diese x somit $\frac{1}{x}\cdot g\left(\frac{1}{x}\right) = x^3\cdot f(x)$. Hieraus und aus (1) folgt $(x - x^3)f(x) = 1$. Wegen $x \neq 0, 1, -1$ ist $x - x^3 = x(x-1)(x+1) \neq 0$. Somit ergibt sich

$$f(x) = \frac{1}{x - x^3}. \qquad (3)$$

Hieraus und aus (2) folgt

$$g(x) = \frac{1}{x^4}\cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{x^3 - x}. \qquad (4)$$

Mithin kann nur dasjenige Paar (f,g) die verlangten Eigenschaften haben, in dem f,g die durch (3), (4) für alle $x \neq 0, 1, -1$ definierten Funktionen sind.

Tatsächlich gilt:

$$x\cdot f(x) - \frac{1}{x}\cdot g\left(\frac{1}{x}\right) = x\cdot\frac{1}{x - x^3} - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 - x^2} - \frac{x^2}{1 - x^2} = 1$$

sowie

$$\frac{1}{x^2}\cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{x - \frac{1}{x}} = \frac{x^2}{x^3 - x} = x\cdot g(x).$$

Daher hat genau das Paar (f,g) mit

$$f(x) = \frac{1}{x - x^3}; \quad g(x) = \frac{1}{x^3 - x}$$

die geforderten Eigenschaften.

1245) <u>Lösung:</u> <u>7 Punkte</u> a) 4 Punkte b) 2 Punkte c) 1 Punkt

a) Angenommen, es gäbe ein Q_i, etwa Q_1, das nicht Ecke von E ist.
Da E konvex ist und alle Q_i im Innern oder auf dem Rande von E liegen, liegen auch alle Punkte aller Seiten von $Q_1Q_2...Q_n$ im Innern oder auf dem Rande von E. Dasselbe gilt folglich für alle Punkte des Innern von $Q_1Q_2...Q_n$.

Nun zeigen wir, daß mindestens eine Seite s von $Q_1Q_2...Q_n$ innere Punkte von E enthält:

Liegt Q_1 im Innern von E, so ist diese Behauptung richtig. Liegt Q_1 auf dem Rande von E, also nach Annahme im Innern einer Seite r von E, so liegt mindestens einer der Punkte Q_n, Q_2 nicht auf r, da sonst $Q_1Q_2...Q_n$ kein n-Eck wäre.
Liege etwa Q_2 nicht auf r. Liegt Q_2 im Innern von E, so ist die Behauptung richtig. Liegt aber Q_2 auf einer von r verschiedenen Seite von E, so ist Q_1Q_2 die Verbindungsstrecke zweier Randpunkte von E, die längs des Randes von E nicht geradlinig miteinander verbunden sind. Daher gehört jeder im Innern von Q_1Q_2 gelegene Punkt zum Innern von E.

Aus der somit gezeigten Behauptung über s folgt:
Die Gerade g, auf der s liegt, zerlegt E in zwei Vielecke V_1, V_2 mit positiven Flächeninhalten F_1, F_2.

Das n-Eck $Q_1Q_2...Q_n$ liegt nun einerseits wegen der Konvexität ganz auf einer Seite von g; andererseits aber liegen alle Punkte von $Q_1Q_2...Q_n$ im Innern oder auf dem Rande von E, also liegen sie bei geeigneter Bezeichnung alle im Innern oder auf dem Rande von V_1.
Der Flächeninhalt von $Q_1Q_2...Q_n$ ist daher mindestens um F_2 kleiner als der von E. Dies widerspricht der Kongruenz von E und $Q_1Q_2...Q_n$; die eingangs gemachte Annahme muß daher falsch sein.

b) Ja, zum Beweis genügt ein Beispiel, etwa folgendes:
Es sei $\triangle P_1P_2P_3$ ein gleichseitiges Dreieck D; es sei M sein Mittelpunkt, und P_4 liege auf der Verlängerung

der Strecke P_2M über M hinaus, aber noch im Innern von D. Bei derjenigen Drehung um M, die P_1 in den Punkt $Q_1 = P_2$ überführt, gehen $P_2;P_3$ in $Q_2 = P_3$ bzw. $Q_3 = P_1$ über, ferner P_4 in einen auf der Verlängerung der Strecke P_3M über M hinaus gelegenen Punkt Q_4 im Innern von D, der daher ebenfalls im Innern von $E = P_1P_2P_3P_4$ liegt, aber keine Ecke von E ist.

c) Nein, zum Beweis genügt ein Gegenbeispiel, etwa folgendes:

Es sei $\triangle P_1P_2P_3$ ein gleichseitiges Dreieck D, es sei P_4 sein Mittelpunkt
Liegen nun alle Ecken $Q_1 \ldots Q_4$ eines zu $E = P_1P_2P_3P_4$ kongruenten Vierecks im Innern oder auf dem Rande von E, so folgt: Bei geeigneter Bezeichnung ist $\triangle Q_1Q_2Q_3$ ein zu D kongruentes Dreieck und Q_4 sein Mittelpunkt.

Da Q_1, Q_2, Q_3 erst recht im Innern oder auf dem Rande von D liegen, so folgt nach a): Jedes Q_i $(i = 1, 2, 3)$ ist eines der P_i $(i = 1, 2, 3)$.
Das Dreieck $Q_1Q_2Q_3$ ist also dasselbe Dreieck wie D, und daher stimmt sein Mittelpunkt Q_4 mit dem Mittelpunkt P_4 von D überein. Mithin ist die in a) gemachte Aussage für E richtig.

1246A) Lösung: 8 Punkte

(I) In Tabelle 1 sind für je ein $i = 1, \ldots, n$ alle Möglichkeiten für S_i aufgezählt, bei B oder B' aus- oder eingeschaltet zu sein.
Für alle diese Möglichkeiten ist anschließend der Zustand von S_i nach den Prozessen (a), (b) und (c) ermittelt. Wie die Tabelle zeigt, gilt für jedes $i = 1, \ldots, n$: S_i ist genau dann bei $B \oplus B'$ eingeschaltet,

B	B'	(a)	(b)	(c)
A	A	A	A	A
A	E	A	E	A
E	A	E	E	A
E	E	E	A	E

Tabelle 1

wenn der Zustand von S_i bei B dem bei B' entgegengesetzt ist. S_i ist genau dann bei B $\otimes$ B' eingeschaltet, wenn S_i sowohl bei B als auch bei B' eingeschaltet ist.

(II) In Tabelle 2 sind für je ein i = 1, ..., n alle Möglichkeiten für S_i aufgezählt, bei B, B' oder B" aus- oder eingeschaltet zu sein. Für alle diese Möglichkeiten ist anschließend mit Hilfe der in (I) erhaltenen Aussagen der Zustand von S_i bei (B $\oplus$ B') $\otimes$ B" sowie bei (B $\otimes$ B") $\oplus$ (B' $\otimes$ B") ermittelt.

B	B'	B"	B $\oplus$ B'	(B $\oplus$ B') $\otimes$ B"	B $\otimes$ B"	B' $\otimes$ B"	(B $\otimes$ B") $\oplus$ (B' $\otimes$ B")
A	A	A	A	A	A	A	A
A	A	E	A	A	A	A	A
A	E	A	E	A	A	A	A
A	E	E	E	E	A	E	E
E	A	A	E	A	A	A	A
E	A	E	E	E	E	A	E
E	E	A	A	A	A	A	A
E	E	E	A	A	E	E	A

Tabelle 2

Wie die Tabelle zeigt, stimmen diese beiden Zustände für jedes i = 1, ..., n bei allen Möglichkeiten miteinander überein. Damit ist (1) bewiesen.

(III) Der Beweis von (2) folgt entsprechend aus Tabelle 3:

B	B'	B*	B* $\oplus$ B'
A	A	A	A
A	E	E	A
E	A	E	E
E	E	A	E

= B

Tabelle 3

1246B) Lösung: 8 Punkte a) 6 Punkte b) 2 Punkte

a) Zu beweisen ist, daß für jede ganzrationale Funktion f ein reelles x mit $f(x) \leqq f''(x)$ oder $f'(x) \leqq f''(x)$ existiert.

Zu jeder ganzrationalen Funktion f gibt es eine natürliche Zahl n und reelle Zahlen $a_o, \dots, a_n$ mit $f(x) = a_n x^n + \dots + a_o$ sowie, wenn $n > 0$ ist, $a_n \neq 0$. Daraus folgt

$$(4)\ f(x) = x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_o}{x^n}\right) \qquad (n \geqq 1),$$

$$(5)\ f'(x) = x^{n-1}\left(na_n + \frac{(n-1)a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{1 \cdot a_1}{x^{n-1}}\right) \quad (n \geqq 2),$$

$$(6)\ f''(x) = x^{n-2}\left(n(n-1)a_n + \frac{(n-1)(n-2)a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{2 \cdot 1 a_2}{x^{n-2}}\right)$$
$$(n \geqq 3),$$

$$(7)\ \frac{f(x)}{f''(x)} = x^2 \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_o}{x^n}}{n(n-1)a_n + \frac{(n-1)(n-2)a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{2 \cdot 1 a_2}{x^{n-2}}}$$
$$(n \geqq 3).$$

Dabei sind die Werte $x = 0$ sowie bei (7) die höchstens endlich vielen Nullstellen von $f''(x)$ auszuschließen.

Nun sind genau die folgenden Fälle möglich:

1. Fall: $n = 0$. Dann gilt $f'(x) = f''(x)$ für alle x.

2. Fall: $n = 1$. Dann gilt die Beziehung $f(x) \leqq 0 = f''(x)$, wenn $a_1 > 0$ ist, für alle $x \leqq -\frac{a_o}{a_1}$, wenn aber $a_1 < 0$ ist, für alle $x \geqq -\frac{a_o}{a_1}$.

3\. Fall: $n \geqq 2$ gerade, $a_n > 0$. Nach (5) gilt dann

$\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$. Ferner gilt, falls $n = 2$ ist, $f''(x) > 0$ für alle x; falls aber $n > 2$ ist, gilt nach (6) dann $\lim\limits_{x \to -\infty} f''(x) = +\infty$.

Daher existiert ein x mit $f'(x) \leqq f''(x)$.

4\. Fall: $n \geqq 2$ gerade, $a_n < 0$. Nach (4) gilt dann

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, nach (7) ferner

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{f''(x)} = +\infty$. Daher existiert ein x mit

$f(x) < 0$, $\frac{f(x)}{f''(x)} \geqq 1$. Aus beiden Ungleichungen folgt zunächst $f''(x) < 0$ und daher nach Multiplikation der zweiten mit $f''(x)$ dann $f(x) \leqq f''(x)$.

5\. Fall: $n \geqq 3$ ungerade, $a_n > 0$. Dann gelten dieselben Aussagen wie im 4. Fall.

6\. Fall: $n \geqq 3$ ungerade, $a_n < 0$. Dann gelten dieselben Aussagen wie im 3. Fall.

Damit ist die Behauptung in jedem Fall bewiesen.

b) Bei der genannten Ersetzung entsteht eine falsche Behauptung, wie etwa folgendes Gegenbeispiel beweist:

Ist $f(x) = x^2 + 3$, so gilt $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$.

Für alle x gilt wegen $x^2 + 3 > 2$ daher $f(x) > f''(x)$ sowie wegen $(x - 1)^2 + 2 > 0$, also $x^2 + 3 > 2x$, auch $f(x) > f'(x)$.

(<u>Zusatzbemerkung</u>: Übrigens gibt es, wie das Beispiel

$f(x) = 2 - e^x + e^{-x}$

zeigt, Funktionen, bei denen für jedes x die Ungleichungen (1) und (2) gelten.)