A 11/12 **XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR**

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklassen 11/12

<u>Achtung</u>: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind gut lesbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1221) Es seien a_0 und q reelle Zahlen mit $a_0 \neq 0$; $q \neq 0$; $q \neq 1$. Ferner sei $\{a_i\}$ eine geometrische Folge, für die $a_i = a_0 \cdot q^i$ $(i = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ gilt.

a) Man beweise, daß die Folgen

$$\{b_i\} \text{ mit } b_i = a_{i+1} - a_i \quad \text{und}$$

$$\{c_i\} \text{ mit } c_i = b_{i+1} - b_i$$

ebenfalls geometrische Folgen sind.

b) Es sind alle Werte von a_0 und q (mit $a_0 \neq 0$; $q \neq 0$) anzugeben, für die die in a) definierten Folgen $\{a_i\}$ und $\{c_i\}$ die Eigenschaft haben, daß $a_i = c_i$ für alle natürlichen Zahlen i gilt.

1222) Jeder von 41 Schülern einer Klasse hatte an genau drei Leichtathletik-Wettkämpfen im Laufen teilzunehmen. Dabei mußte jeder dieser Schüler je einmal auf den Bahnen 1, 2 und 3 antreten. Schüler A meint, daß es in dieser Klasse allein auf Grund dieser Bestimmungen mindestens sieben Schüler geben müsse, bei denen die Reihenfolge der Startbahnen übereinstimmte. Schüler B meint dagegen nach einigem Nachdenken, daß es sogar acht solcher Schüler geben müsse.

Man überprüfe, ~~ob jede dieser beiden Meinungen richtig ist.~~

für jede dieser beiden Meinungen, ob sie richtig ist.

1223) In einem beliebigen konvexen Viereck ABCD seien E der Mittelpunkt der Seite AB und F der der Seite CD. Der Schnittpunkt von AF mit DE sei G, der von BF mit CE sei H genannt.

Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt des Vierecks EHFG gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AGD und BHC ist.

1224) Man ermittle alle Paare (x,y) reeller Zahlen, die Lösungen des Gleichungssystems

$x^3 + y^2 + x + 1 = 0 \qquad (1)$

$y^3 + x^2 + y + 1 = 0 \qquad (2)$ sind.

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11 und 12

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1221) **Lösung**: **8 Punkte**

a) Es gilt $b_i = a_o \cdot q^{i+1} - a_o q^i$, also

$$b_i = a_o \cdot (q-1) \cdot q^i.$$

Daher ist $\{b_i\}$ offensichtlich eine geometrische Folge.

Weiter gilt $c_i = a_o(q-1)q^{i+1} - a_o(q-1)q^i$, also

$$(1) \qquad c_i = a_o(q-1)^2 \cdot q^i.$$

Daher ist $\{c_i\}$ ebenfalls eine geometrische Folge.

b) Die Bedingung, daß $a_i = c_i$ für alle natürlichen Zahlen i gilt, wird wegen (1) und $a_o \neq 0$, $q \neq 0$ genau dann erfüllt, wenn $(q-1)^2 = 1$ gilt.
Wegen $q \neq 0$ ist das genau für $q = 2$ der Fall.
Die gesuchten Werte sind also: $q = 2$, a_o beliebig von 0 verschieden.

1222) **Lösung**: **10 Punkte**

Man teile die Klasse entsprechend den möglichen Bahn-Ziffer-Kombinationen 1-2-3, 1-3-2, 2-1-3, 2-3-1, 3-1-2, 3-2-1 in sechs Gruppen auf.
Wären in jeder dieser Gruppen nicht mehr als sechs Schüler, so könnten in der Klasse nicht mehr als 36 Schüler sein, was den Bedingungen der Aufgabe widerspricht. Folglich sind in einer dieser Gruppen mindestens sieben Schüler. Die Meinung des Schülers A ist also richtig.

Es kann aber sein, daß in keiner dieser Gruppen mehr als sieben Schüler sind (Beispiel: In einer Gruppe sind 6, in allen übrigen je 7 Schüler).
Folglich ist die Meinung des Schülers B nicht richtig.

1223) <u>Lösung</u>: <u>10 Punkte</u>

Die Fußpunkte der Lote von C, D und F auf die Gerade durch A und B seien K, L bzw. M. Dann ist entweder $K = L = M$ (Abb. L 1223 b), oder KCDL ist ein Trapez und FM seine Mittellinie (Abb. L 1223 a, c).

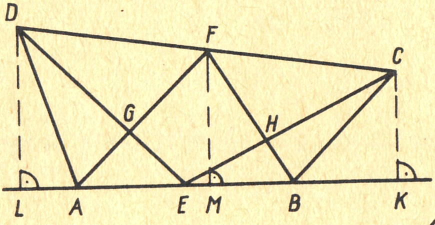

Abb. L 1223a

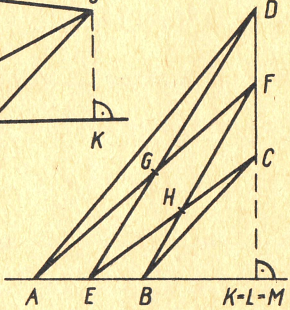

Abb. L 1223b

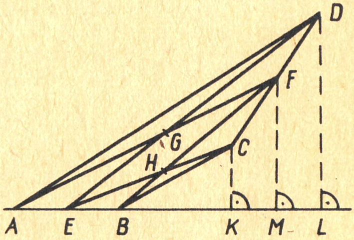

Abb. L 1223c

In jedem dieser Fälle gilt $\overline{FM} = \frac{1}{2}(\overline{CK} + \overline{DL})$. Für die Flächeninhalte A_1, A_2, A_3 der Dreiecke ABF, AED bzw. BEC gilt daher und wegen $\frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{BE}$:

$$A_1 = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{FM} = \frac{1}{4}\overline{AB}\cdot(\overline{CK} + \overline{DL}) = \frac{1}{2}\overline{BE}\cdot\overline{CK} + \frac{1}{2}\overline{AE}\cdot\overline{DL} = A_3 + A_2. \quad (1)$$

Sind ferner A_{21}, A_{22}, A_{31}, A_{32}, A_V die Flächeninhalte der Dreiecke AEG, AGD, BEH, BHC bzw. des Vierecks EHFG, so gilt

$$A_1 = A_V + A_{21} + A_{31}, \quad A_2 = A_{21} + A_{22}, \quad A_3 = A_{31} + A_{32}.$$

Aus (1) folgt daher

$$A_V + A_{21} + A_{31} = A_{21} + A_{22} + A_{31} + A_{32},$$

also $A_V = A_{22} + A_{32}$, w.z.b.w.

1224) **Lösung:** **12 Punkte**

Angenommen, das reelle Zahlenpaar (x,y) sei eine Lösung des Gleichungssystems (1), (2). Dann folgt durch Subtraktion aus (1) und (2)

$$x^3 - y^3 - x^2 + y^2 + x - y = 0, \quad \text{also}$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - x - y + 1) = 0 \qquad (3).$$

Die Gleichung (3) ist nur dann erfüllt, wenn

a) $x - y = 0$ (4) oder

b) $x^2 + xy + y^2 - x - y + 1 = 0$ ist.

Im Falle a) gilt $x = y$, also wegen (1)

$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ bzw.

$(x + 1)(x^2 + 1) = 0$.

Da für alle reellen Zahlen x stets $x^2 + 1 > 0$ gilt, folgt hieraus $x = -1$ und daher wegen (4) $y = -1$.

Im Falle b) erhält man

$$0 = x^2 + xy + y^2 - x - y + 1$$

$$0 = \frac{1}{2}\left[(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1)\right]$$

$$0 = \frac{1}{2}\left[(x + y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2\right].$$

Diese Gleichung wäre aber nur dann erfüllt, wenn $(x - 1)^2 = 0$, also $x = 1$, und $(y - 1)^2 = 0$, also $y = 1$, und $(x + 1)^2 = 0$, also $x = -y$ wäre. Das ist aber wegen $1 \neq -1$ nicht möglich. Daher gibt es im Falle b) keine Lösung.

Das Gleichungssystem (1),(2) hat somit höchstens die reelle Lösung $(-1, -1)$.

Tatsächlich ist

$(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0$, d. h. für $x = y = -1$ sind (1) und (2) erfüllt.

Im Bereich der reellen Zahlen hat das Gleichungssystem (1),(2) mithin genau die Lösung $(-1, -1)$.